幾何学I演習問題

担当: 中島 啓　TA: 伊藤公毅, 近藤剛史

2003年4月30日(水)

問題 8. M を C^∞ 級多様体とし, $x \in M$ とする.

(1) M に入る C^∞ 級曲線 $c\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ で $c(0) = x$ となるものを考える. ただし ε は正の実数である. このとき, $t = 0$ における速度ベクトル $\left.\dfrac{dc}{dt}\right|_{t=0}$ は, x における M の接空間 T_xM に属することを証明せよ.

(2) 逆に, T_xM の元 v に対して, 上のような曲線 c で $v = \left.\dfrac{dc}{dt}\right|_{t=0}$ となるものが存在することを示せ. (ε は, 小さく取ってよい.)

問題 9. 問題 **6** の写像 $f\colon T^2 \to T^2$ $(x, y) \mapsto (2x, 2y)$ について, その微分 $df_p\colon T_pT^2 \to T_{f(p)}T^2$ は全ての p に対して同型写像であることを示せ.

問題 10. 多項式写像 $f\colon \mathbf{R}P^1 \to \mathbf{R}P^1$ を

$$f([x:y]) = [x^n : a_ny^n + a_{n-1}xy^{n-1} + \cdots + a_0x^n]$$

で定める. ($n \geq 1$, $a_n \neq 0$) f の微分 df_p が消える p をすべて求めよ.

問題 11. 問題 **7** の写像 $\pi\colon S^{2n+1} \to \mathbf{C}P^n$ について,

(1) その微分 $df_p\colon T_pS^{2n+1} \to T_{\pi(p)}\mathbf{C}P^n$ は全ての p について全射であることを示せ.

(2) $\pi^{-1}(q)$ が S^1 と微分同相であることを示せ.

先週の略解 **7** で F が連続写像であることの証明は略した. 明らかでないと思われる人は, きちんと証明をつけること. (位相空間の演習問題である.) 今後も略解はあくまで略でしかないので注意すること. 分からなければ質問してください.

略解 8. (1) $v = \left.\dfrac{dc}{dt}\right|_{t=0}$ とおく. C^∞ 級関数 f に対して, $vf = \left.\frac{df(c(t))}{dt}\right|_{t=0}$ とおくのが, v の接ベクトルとしての定義に他ならない.

(2) x が原点に移される座標 $\varphi\colon U \to V$ を取って, $v = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ と表わしたとき, $c(t) = \varphi^{-1}(a_1 t, a_2 t, \ldots, a_n t)$ とすればよい.

略解 9. 問題 6 のように座標を取って計算すると, df_p は単位行列の 2 倍となるから正しい.

略解 10. 座標 $U_0 = \{x \neq 0\}$ では,

$$f([1:y]) = [1 : a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \cdots + a_0]$$

となり, 像も U_0 に入るが, $\varphi_0 \circ f \circ (\varphi_0)^{-1}$ の微分が消えるのは $a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \cdots + a_0$ の微分が 0 になる点である. あとは $[0:1]$ で微分が消えているかどうか調べればよい.

$$f([x:1]) = [x^n : a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_0 x^n]$$

である. $a_n \neq 0$ なので x が十分小さければ, $a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_0 x^n \neq 0$ となり, 座標 φ_1 を使って $\frac{x^n}{a_n + a_{n-1}x + \cdots + a_0 x^n}$ の微分を計算すると, $x = 0$ で微分が消えている. したがって $p = [0:1]$ でも $df_p = 0$ である.

略解 11. $S^{2n+1} = \{(z_0, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^{n+1} \mid |z_0|^2 + \cdots + |z_n|^2 = 1\}$ とすると, $\pi(z_0, \ldots, z_n) = [z_0 : \cdots : z_n]$ である. すべての点で座標を取り, ヤコビ行列を計算して階数を計算すればよいが, 計算が複雑になる. そこでユニタリ行列 g を用いて, $g\colon S^{2n+1} \to S^{2n+1}$, $[g]\colon \mathbf{C}P^n \to \mathbf{C}P^n$ を $g(\vec{z}) = g\vec{z}$, $[g][\vec{z}] = [g\vec{z}]$ で定義する. (記号の意味は説明しないが明らかであろう.) このとき $[g] \circ \pi \circ g^{-1} = \pi$ に注意する. S^{2n+1} の任意の点が, ある g を取ることによって $p = (1, 0, \ldots, 0)$ に移すことができ, また g, $[g]$ は微分同相写像であることは容易にチェックできるから, p だけで微分を計算すればよい.

S^{2n+1} の開集合 U を $U = \{\pm \mathrm{Re}(z_0) > 0\}$ とおく. U 上の座標 φ を

$$\varphi^{-1}(y_0, z_1, \ldots, z_n) = \left(\sqrt{1 - \textstyle\sum_{i \geq 1} |z_i|^2 - y_0^2} + \sqrt{-1}\, y_0, z_1, \ldots, z_n\right) \qquad y_0 \in \mathbf{R}, z_i \in \mathbf{C}$$

のように定める. また $\mathbf{C}P^n$ の開集合 $U_0 = z_0 \neq 0$ に非同次座標 $\psi([z_0 : \cdots : z_n]) = (z_1/z_0, \ldots, z_n/z_0)$ を入れると

$$\psi \circ \pi \circ \varphi^{-1}(y_0, z_1, \ldots, z_n) = \frac{1}{\sqrt{1 - \sum_{i \geq 1} |z_i|^2 - y_0^2} + \sqrt{-1}\, y_0}(z_1, \ldots, z_n)$$

となる. これを $(s_1 + \sqrt{-1}t_1, \ldots, s_n + \sqrt{-1}t_n)$, また $z_i = x_i + \sqrt{-1}y_i$ $(i \geq 1)$ とおいて, p すなわち $x_i = y_i = 0$ でヤコビ行列を求めると

$$\frac{\partial s_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}, \quad \frac{\partial s_i}{\partial y_j} = 0, \quad \frac{\partial t_i}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial t_i}{\partial y_j} = \delta_{ij}$$

となる. ($1 \leq i, j \leq n$ と y_0 がある.) これは単位行列に 0 を一列付け加えたもので, 全射である.

また $\pi^{-1}(q)$ は, 上と同様の議論により $q = [1 : 0 : \cdots : 0]$ のときに調べればよい. このとき $\pi^{-1}(q) = \{(z_0, 0, \ldots, 0) \mid |z_0|^2 = 1\}$ であるから, 明らかに S^1 と微分同相である.