幾何学I演習問題

担当: 中島 啓　　TA: 伊藤公毅, 近藤剛史

2003年5月14日 (水)

問題 12. $\widetilde{f}\colon S^2 \to \mathbf{R}^4$ を $f(x,y,z) = (yz, xz, xy, x^2+2y^2+3z^2)$ によって定義する. $\mathbf{R}P^2 = S^2/\sim$ (ただし $(x,y,z) \sim -(x,y,z)$ とする) に従って, $\widetilde{f}$ は写像 $f\colon \mathbf{R}P^2 \to \mathbf{R}^4$ を誘導する. f が C^∞ 級であること, 埋め込みであることを証明せよ.

問題 13. S^n の北極からの立体射影 $\varphi^+\colon S^n \setminus \{(0,\dots,0,1)\} \to \mathbf{R}^n$ を問題 **3** のとおりに定める. $\mathbf{R}^n = \{(y_1,\dots,y_n)\}$ 上のベクトル場 X を

$$X = \frac{\partial}{\partial y_\alpha}$$

で定める. $(\alpha = 1,\dots,n)$ このベクトル場 X が S^n 上のベクトル場 $\widetilde{X}$ に拡張されることを証明し, また, そのベクトル場の値 $\widetilde{X}_p$ が 0 になる点 p を全て求めよ. また, $Y = y_1\frac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + y_n\frac{\partial}{\partial y_n}$ ではどうか？

問題 14. 二次元トーラス T^2 上に $X = \frac{\partial}{\partial x}$ はベクトル場を定めることを証明せよ. ただし x は $\mathbf{R}\times\mathbf{R}/\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ の第一成分の実数である. 正確には, $\mathbf{R}^2$ 上のベクトル場 $\widetilde{X} = \frac{\partial}{\partial x}$ に対して, 射影 π を通じて $d\pi_p(\widetilde{X}_p) = X_{\pi(p)}$ を満たすような T^2 上のベクトル場 X が存在するという意味である.

問題 15. ベクトル場 X, Y, Z に対して, ヤコビの恒等式

$$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$$

を証明せよ.

略解 12. $\mathbf{R}P^2$ の座標として, $\pi\colon S^2 \to \mathbf{R}P^2$ を利用して, S^2 の開集合 V で, π を制限すると全単射になるものを取り, $U = \pi(V)$ として, φ を π^{-1} に S^2 の座標を合成したものを取る. (非同次座標との 座標変換が C^∞ 級であることの証明は略す.) このようにすれば, $\widetilde{f}$ が C^∞ 級であること (これの証明は略) から f も C^∞ 級である.

$\widetilde{f}$ の微分を計算すると

$$\begin{pmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \\ 2x & 4y & 6z \end{pmatrix}$$

を接空間 $T_{(x,y,z)}S^2 = \{(X,Y,Z) \mid xX + yY + zZ = 0\}$ に制限したものである. これが単射であることは容易にチェックできる. $\pi\colon S^2 \to \mathbf{R}P^2$ は接空間の間の同型を与えるから (これは上のように座標を入れておけば明らかである), f ははめ込みである. f が単射であることの証明は, $\widetilde{f}$ の行き先を調べればすぐ分かる. $\mathbf{R}P^2$ はコンパクト, $\mathbf{R}^4$ はハウスドルフであるから, f は像への同相写像である.

略解 13. φ^- を南極からの直交射影とすると, 略解 **3** により

$$\varphi^+ \circ (\varphi^-)^{-1}(y_1, \ldots, y_n) = (\frac{y_1}{|y|^2}, \ldots, \frac{y_n}{|y|^2}), \qquad |y|^2 = \sum y_\alpha^2$$

であった. この右辺を $(w_1, \ldots, w_n)$ とおくと,

$$\frac{\partial}{\partial y_\alpha} = \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial w_\beta}{\partial y_\alpha}\frac{\partial}{\partial w_\beta} = \sum_{\beta=1}^n \left(\frac{\delta_{\alpha\beta}}{|y|^2} - \frac{2y_\beta y_\alpha}{|y|^4}\right)\frac{\partial}{\partial w_\beta} = \sum_{\beta=1}^n \left(\delta_{\alpha\beta}|w|^2 - 2w_\beta w_\alpha\right)\frac{\partial}{\partial w_\beta}$$

となり, これは $w=0$ まで滑らかになっていることを意味する. また, $w = 0$ ではこれは 0 になっているから, ベクトル場が消えているのは南極の一点である. また,

$$\sum_{\alpha=1}^n y_\alpha \frac{\partial}{\partial y_\alpha} = \sum_{\alpha=1}^n \left(y_\alpha|w|^2 - 2\sum_{\beta=1}^n 2y_\alpha w_\beta w_\alpha\right)\frac{\partial}{\partial w_\beta} = -\sum_{\beta=1}^n w_\beta \frac{\partial}{\partial w_\beta}$$

であり, これも $w = 0$ まで滑らかになっている.

注. n が偶数のとき, S^n 上のいかなるベクトル場 X も, それが 0 になる点の数 (しかるべき数え方をする) は 2 個になることがしられている. n が奇数のときは 0 個になる. (Poincaré-Hopf の定理)

略解 14. $T^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ の座標は次のように取ることができる. 開集合 $V \subset \mathbf{R}^2$ であって, π の V への制限は全単射であり, $U = \pi(V)$ とするときに座標 $\varphi\colon U \to V$ は, π の逆写像である. この座標に π を制限すると, $\mathbf{R}^2$ 上のベクトル場 $\widetilde{X}$ と座標ベクトル場 $\partial/\partial x$ は同じである. (正確には $d\pi$ で写りあう.) 上のような座標二つに関する座標変換で, $\partial/\partial x$ がそれ自身にうつることは, (共通部分の連結集合上で) 座標変換が定数を足していることに他ならないことから分かる.

もしくは, T^2 上の C^∞ 級関数は, $\mathbf{R}^2$ 上の C^∞ 級関数で, $f(x+m, y+n) = f(x,y)$ $((m,n) \in \mathbf{Z}^2)$ を満たすものであることに注意して, $\frac{\partial}{\partial x}f$ が再びこの性質を満たすことからもチェックできる.

注. 上と同じく T^2 上のどんなベクトル場も 0 となる点の数は 0 個である.

略解 15. 任意の C^∞ 級関数 f に左辺を作用させてみれば, 0 であることが分かる.