幾何学I演習問題

担当: 中島 啓　　TA: 伊藤公毅, 近藤剛史

2003年5月21日(水)

問題 16. $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ の1パラメータ変換群を $F_t(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \cos t - x_2 \sin t, x_1 \sin t + x_2 \cos t, x_3)$ によって定める.
(1) 1パラメータ変換群であることをチェックせよ.
(2) F_t が定めるベクトル場を計算し, さらに北極からの立体射影 $\varphi^+ \colon S^2 \setminus \{(0,0,1)\} \to \mathbf{R}^2$ を用いて, $\mathbf{R}^2 = \{(y_1, y_2)\}$ 上に定まるベクトル場を計算せよ.

問題 17. 先週の問題 **13**, 問題 **14** に出てきたベクトル場の積分曲線を求め, それらが完備であることを直接に確かめよ.

問題 18. M, N を多様体とし, $F \colon M \to N$ を C^∞ 級写像とする. M 上のベクトル場 X と N 上のベクトル場 Y が F-関係にあるとは, X の定める微分作用素 $D_X \colon C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ と Y の定める微分作用素 $D_Y \colon C^\infty(N) \to C^\infty(N)$ の間に

$$D_X \circ F^* = F^* \circ D_Y$$

という式が成り立つときをいう. ただし $F^* \colon C^\infty(N) \to C^\infty(M)$ は, $F^*(g) = g \circ F$ によって定義される写像である. このとき,
(1) X と Y が F-関係にある必要十分条件は, M の各点 p に対して $dF_p(X_p) = Y_{F(p)}$ が成り立つことであることを証明せよ.
(2) X_1 と Y_1, X_2 と Y_2 がそれぞれ F-関係にあるとき, $[X_1, X_2]$ と $[Y_1, Y_2]$ が F-関係にあることを証明せよ.

問題 19. $F \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を $F(x) = x^{1/3}$ によって定義する. M を $\mathbf{R}$ に通常の C^∞ 級微分構造を入れたものとし, N を $\mathbf{R}$ に F が $M \to N$ の微分同相になるように C^∞ 級微分構造を入れたものとする. (すなわち, $F^{-1} \colon N \to M \cong \mathbf{R}$ が N の座標である.)
(1) φ: $M \to N$ を M, N をともに $\mathbf{R}$ と思ったときの恒等写像とする. C^∞ 級写像であることを証明せよ. しかし φ^{-1} は, C^∞ 級でないことを証明せよ. (よって φ は全単射な C^∞ 級写像であるが微分同相ではない.)
(2) M 上のベクトル場 $X = \frac{\partial}{\partial x}$ について, φ-関係にある N 上のベクトル場 Y が存在しないことを証明せよ.

略解 16. (1) 明らか

(2) t で微分すれば, $(-x_2, x_1, 0)$ である. (これは, $p = (x_1, x_2, x_3)$ と直交しているので, T_pS^2 に属している.) 立体射影による座標で表わしたものを計算するには, これを用いてもよいが, $\varphi^+ \circ F_t \circ (\varphi^+)^{-1}(y_1, y_2) = (y_1 \cos t - y_2 \sin t, y_1 \sin t + y_2 \cos t)$ を微分するのが, 簡単である. 答は $-y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} + y_1 \frac{\partial}{\partial y_2}$.

略解 17. **問題 13** の $\widetilde{X}$ のとき: X の定義から座標 $\varphi^+ = (y_1, \ldots, y_n)$ で表わすと, 積分曲線は $y_\beta(t) = y_\beta(0) + t\delta_{\alpha\beta}$ である. また, 北極 $(0, \ldots, 0, 1)$ を出発する積分曲線は, 北極にずっと留まっている. したがって $\widetilde{X}$ は完備である.

問題 13 の $\widetilde{Y}$ のとき: 積分曲線を座標で表わすと $y_\beta(t) = e^t y_\beta(0)$ である. また上と同様に北極 $(0, \ldots, 0, 1)$ を出発する積分曲線は, 北極にずっと留まっている. したがって $\widetilde{X}$ は完備である.

問題 14 の X のとき: $(x(t), y(t)) = (x(0) + t, y(0))$ という $\mathbf{R}^2$ の直線を, 射影 $\pi\colon \mathbf{R}^2 \to T^2$ で落とした曲線が積分曲線である. 特に完備である.

略解 18. (1) N 上の C^∞ 級関数と M の点 p に対して

$$(D_X \circ F^*g)(p) = X_p(g \circ F) = dF_p(X_p)g, \qquad Y_{F(p)}g = (D_Y g)(F(p)) = (F^* \circ D_Y g)(p)$$

が成り立つ. したがって $D_X \circ F^* = F^* \circ D_Y$ と $dF_p(X_p) = Y_{F(p)}$ は同値である.

(2) リーブラケットの定義により $D_{[X_1,X_2]} = D_{X_1} \circ D_{X_2} - D_{X_2} \circ D_{X_1}$ が成り立つから,

$$\begin{aligned} &D_{[X_1,X_2]} \circ F^* = (D_{X_1} \circ D_{X_2} - D_{X_2} \circ D_{X_1}) \circ F^* = D_{X_1} \circ F^* \circ D_{Y_2} - D_{X_2} \circ F^* \circ D_{Y_1} \\ &= F^* (D_{Y_1} \circ D_{Y_2} - D_{Y_2} \circ D_{Y_1}) = F^* \circ D_{[Y_1,Y_2]} \end{aligned}$$

となって結論が従う.

略解 19. (1) 座標をとって C^∞ 級であることを確かめればよいが, φ の方は $F^{-1} \circ \varphi\colon \mathbf{R} \cong M \to M \cong \mathbf{R}$ が C^∞ 級であることを意味する. $F^{-1} \circ \varphi(x) = x^3$ だから, C^∞ 級は正しい. 一方, φ^{-1} の方は, $\varphi^{-1} \circ F\colon \mathbf{R} \cong M \to M \cong \mathbf{R}$ であるが, これは $x \mapsto x^{1/3}$ だから C^∞ 級ではない.

(2) 上で定めた N の座標を y とする. つまり $\varphi(x)$ を座標 y で表すと, $y = x^3$ である. したがって M, N という多様体の代りに, $\varphi\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}; \varphi(x) = x^3$ を考えて, X と φ-関係にあるベクトル場 Y がないことをチェックすればよい. $\varphi'(x) = 3x^2$ であるから, $d\varphi_x(\frac{\partial}{\partial x}) = \frac{dy}{dx}\frac{\partial}{\partial y} = 3x^2 \frac{\partial}{\partial y}$ である. ところが, $3x^2 = 3y^{2/3}$ は y の C^∞ 級関数ではない. よって, ベクトル場 Y は C^∞ 級にはとれない.