幾何学I演習問題

担当: 中島 啓　TA: 伊藤公毅, 近藤剛史

2003年5月28日(水)

問題 20. X, Y を M 上の C^∞ 級ベクトル場とし, φ_t, ψ_t を対応する1パラメータ変換群とする. (簡単のため X, Y は完備とする.)

(1) $F\colon M \to M$ を C^∞ 級微分同相とするとき, $F \circ \varphi_t \circ F^{-1}$ は, ベクトル場 $F_*(X)$ に対応した1パラメータ変換群であることを証明せよ.

(2) $[X, Y] = 0$ である必要十分条件は, $(\varphi_t)_*(Y) = Y$ となることであり, さらに $\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t$ がすべての s, t について成り立つことであることを証明せよ.

問題 21. (1) $O(n) = \{n \times n$ 次直交行列 $\}$ が Lie 群であることを証明せよ. また, Lie 環 $\mathfrak{so}(n)$ を, 単位元 e における接空間としてどのような行列の全体か, 求めよ.

(2) $T^n = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ が加法に関して, Lie 群であることを証明せよ. 問題 **14** のベクトル場 X が左不変であることをチェックせよ.

(3) S^3 にしかるべき群構造を入れて, Lie 群であることを証明せよ. (ヒント: 四元数. もしくは $SU(2) = 2 \times 2$ 特殊ユニタリ群)

問題 22. G, H を Lie 群とし, $F\colon G \to H$ を群の準同型写像であって, かつ C^∞ 級であるとする. このとき $X \in \mathfrak{g}$ に対して

$$F(\exp X) = \exp(dF_e X)$$

を証明せよ. ただし, dF_e は単位元における写像 F の微分であり, $dF_e X$ は, X を単位元における接ベクトル (i.e., $\in T_e G$) とみなし, $dF_e X$ は $T_e H$ の元となるが, それを左不変ベクトル場とみなすが, $dF_e X$ である.

問題 23. G を Lie 群とするとき, $g \in G$ に対して写像 $\varphi_g\colon G \to G$ を $\varphi_g(x) = gxg^{-1}$ によって定める. このとき $d(\varphi_g)_e\colon T_e G \to T_e G$ を G の随伴表現という. この線型写像を Ad_g で表わす. ($T_e G$ を Lie 環 $\mathfrak{g}$ と同一視することにより, $\mathfrak{g}$ 上の線型写像が定まっている.)

(1) $\mathrm{Ad}_{gh} = \mathrm{Ad}_g \circ \mathrm{Ad}_h$ を証明せよ.

(2) $F\colon G \to H$ が問題 **22** の通りのとき, $dF_e \circ \mathrm{Ad}_g = \mathrm{Ad}_{F(g)} \circ dF_e$ を証明せよ.

(3) $G = GL(r, \mathbf{R})$ のときに $\mathfrak{gl}(r, \mathbf{R})$ を $r \times r$ 実行列の全体とみなして Ad_g を計算せよ.

(4) 問題 **21**(3) のの Lie 群 $G = S^3$ の随伴表現の線型写像が, $\mathfrak{g}$ の自然な内積を保ち, したがって $SO(3)$ の中に入っていることを示せ. これにより誘導される写像 $F\colon G \to SO(3)$ は, 群の準同型である. 微分 $dF_e\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{so}(3)$ が同型であることを示せ. また, F が $S^3 \to S^3/\pm 1 = \mathbf{R}P^3$ と同じであることを証明せよ.

注　$SO(3) = \{3 \times 3$ 直交行列 g で, $\det g = 1\}$. $\mathfrak{so}(3) = \{3 \times 3$ 交代行列 $\}$.

略解 20. (1) $c(t)$がベクトル場Xの積分曲線であるとするとき, $F(c(t))$を考える. $\frac{d}{dt}F(c(t)) = dF_{c(t)}\frac{d}{dt}c(t) = dF_{c(t)}X_{c(t)} = F_*(X)_{F(c(t))}$であるから, $F(c(t))$は$F_*(X)$の積分曲線である. そして初期値は$F(c(0))$である. $c(0) = p$としたとき, $\varphi_t(p) = c(t)$がφ_tの定義だから, ψ_tを$F_*(X)$の定める1パラメータ変換群として, $\psi_t(F(p)) = F(c(t)) = F \circ \varphi_t(p)$である. よって$F \circ \varphi_t = \psi_t \circ F$であり, 結論が従う.

(2) まず, (1)と$\varphi_s \circ \varphi_t \circ \varphi_{-s} = \varphi_t$から$(\varphi_s)_* X = X$が任意の$s$について成立することに注意する. (もちろん定義に戻って直接チェックしてもよい.) したがって$(\varphi_s)_*[X,Y] = [X,(\varphi_s)_*Y]$が成り立つ. よって$[X,Y] = 0$と, すべての$s$について$[X,(\varphi_s)_*Y] = 0$が成り立つことは同値である.

さて, $[X,Y] = \lim_{t\to 0}\frac{(\varphi_{-t})_*Y - Y}{t}$である. したがって$(\varphi_{-t})_*(Y) = Y$ならば, $[X,Y] = 0$である. 逆に$[X,Y] = 0$とすると, 上で注意したように$[X,(\varphi_s)_*Y] = 0$が成り立つ. したがって, $0 = \lim_{t\to 0}\frac{(\varphi_{-t})_*((\varphi_s)_*Y) - (\varphi_s)_*Y}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{(\varphi_{s-t})_*Y - (\varphi_s)_*Y}{t}$である. この極限の式は, (座標を取って接空間を数ベクトル空間とみなせば,) $\frac{d}{ds}(\varphi_s)_*(Y) = 0$を意味し, よって$(\varphi_s)_*(Y)$は, sによらずに定ベクトルで, したがってYに等しい.

さらに, $(\varphi_t)_*(Y) = Y$の必要十分条件は, 両辺に対応する1パラメータ変換群が等しいことであり, したがって(1)より$\varphi_{-t} \circ \psi_s \circ \varphi_t = \psi_s$である.

略解 21. (1) Lie群であることの証明は略. Lie環は$\mathfrak{so}(n) = \{n \times n$交代行列$\}$.

(2) 略

(3) 虚数単位を三つi, j, kと用意して, $\mathbf{R}^4 = \{a + bi + cj + dk \mid a, b, c, d \in \mathbf{R}\}$に, $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$となるように(非可換な)積を入れる. (結合律が満たされることは各自確かめよ.) このとき$\mathbf{R}^4$の元を四元数という. さらに絶対値を$|a+bi+cj+dk|^2 = a^2+b^2+c^2+d^2$で定めれば, $|xy| = |x||y|$となることが計算により確かめられる. よってS^3は長さが1の四元数の全体であり, 四元数の積によって群の構造が入る. (逆元は共役四元数) このときS^3がLie群となることは容易にチェックできる.

略解 22. $c(t) = F(\exp(tX))$とおく.

$$c(t+s) = F(\exp((t+s)X)) = F(\exp(tX)\exp(sX)) = F(\exp(tX))F(\exp(sX)) = c(t)c(s)$$

が成り立つ. ここでFが群の準同型であることを用いた. この式は, $c(t)$が1パラメータ部分群であることを意味している. 原点での微分は$dF_e(X)$であるから主張が従う.

略解 23. (1) $\varphi_{gh} = \varphi_g \circ \varphi_h$を微分すればよい.

(2) $F \circ \varphi_g = \varphi_{F(g)} \circ F$を微分すればよい.

(3) $g \in GL(r, \mathbf{R})$, $X \in \mathfrak{gl}(r, \mathbf{R})$として$\mathrm{Ad}_g(X) = gXg^{-1}$.

(4) Lie環$\mathfrak{g}$は, 単位元における接空間として, 純虚四元数$\{ai + bj + ck \mid a, b, c \in \mathbf{R}\}$と同一視される. このとき随伴表現は, 長さ$1$の四元数$g$を左右から$gxg^{-1}$と純虚四元数$x$に掛ける線型写像である. $\overline{}$を共役四元数を取る写像として, $\overline{gxg^{-1}} = \overline{g^{-1}}\,\overline{x}\,\overline{g} = -gxg^{-1}$として, gxg^{-1}が再び純虚四元数であることが分かる. 純虚四元数の空間に絶対値で長さを入れると, $|gxg^{-1}| = |x|$とAd_gは長さを保つ. よって$\mathrm{Ad}_g \in O(3)$である. S^3が連結だから, $SO(3)$に入る. 微分が同型である, この群の準同型写像の核が± 1であることは, 容易に分かる. 全射であることを計算で示すには, $SO(3)$において$\exp$が全射であることを最初に示し, あとはdF_eが同型であることと, 問題**22**を使えばよい.