幾何学I演習問題

担当: 中島 啓　　TA: 伊藤公毅, 近藤剛史

2003年6月11日(水)

5/30の問題**22**もやること.

問題 24. n次元球面 $S^n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$ に $O(n+1) = \{g \in GL(n+1, \mathbf{R}) \mid g^t g = I\}$ が $x \mapsto gx$ によって作用する.

(1) この作用が C^∞ 級であること, すなわち写像 $O(n+1) \times S^n \ni (g, x) \mapsto gx \in S^n$ が C^∞ 級であることを示せ.

(2) $H \subset O(n+1)$ を点 $x_0 = {}^t(1, 0, \ldots, 0) \in S^n$ の固定部分群, すなわち $H = \{g \in O(n+1) \mid gx_0 = x_0\}$ とする. H が $O(n)$ と同型な $O(n+1)$ の部分多様体であることを証明せよ.

(3) 自然な写像 $O(n+1)/O(n) \to S^n$ が微分同相であることを証明せよ.

問題 25. (1) $SU(1,1) = \left\{ \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{smallmatrix}\right] \in M(2, 2, \mathbf{C}) \,\middle|\, |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\}$ とする. Lie群であることを証明せよ.

(2) Dを複素平面の原点を中心とする半径1の円の内部 $\{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$ とおく. $SU(1,1)$ は D に一次分数変換 $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{smallmatrix}\right] z = \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}$ で作用することを証明せよ.

(3) 原点 $z = 0$ の固定部分群 H は何か? $SU(1,1)/H$ が D と微分同相であることを証明せよ.

問題 26. $\mathbf{R}^n$ の中の r 次元部分空間の全体のなすグラスマン多様体 $G(r, n)$ を, 等質空間 G/H の形に表わせ.

問題 27. $\varphi\colon \mathbf{R} \to T^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ を $t \mapsto (ta, tb) \mod \mathbf{Z}^2$ で定義する $(b \neq 0)$. これは群の準同型で, C^∞ 級であり, 微分は単射, すなわちはめ込みである. また, a/bが有理数でなければ φは単射であり, $\varphi(\mathbf{R})$ は T^2 の部分群であるが, 部分多様体ではない. a/bが有理数でないとき $T^2/\varphi(\mathbf{R})$ に C^∞ 級多様体の構造が入れられるだろうか?

略解 24. (1) $GL(n+1,\mathbf{R}) \times \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^{n+1}$ が C^∞ 級であることは, 行列とベクトルの積だから明らかである. これを部分多様体に制限したものだから C^∞ 級である.

(2) $H = \{ \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & g' \end{smallmatrix}\right] \,\middle|\, g' \in O(n) \}$ である. 自然な写像 $O(n) \to H$ が同型であることは自明である. また $O(n)$ はコンパクトだから (証明は略), 連続な全単射 $O(n) \to H$ は同相写像となる. C^∞ 級であることも明らか. 微分が消えていないことは, 原点でチェックすればよいが, これも明らか. よって部分多様体である.

(3) $O(n+1) \to O(n+1)/O(n)$ の局所的な切断, すなわち授業でやった座標 $\psi\colon U \to \mathfrak{m}$ ($\mathfrak{so}(n+1) = \mathfrak{so}(n) \oplus \mathfrak{m}$) に exp を合成して $U \to O(n+1)$ という写像にしたもの, をとれば, 自然な写像 $O(n+1)/O(n) \to S^n$ が, $e\,O(n)$ の回りで C^∞ 級なことが分かる. 任意の点 $g\,O(n)$ については左移動して原点に移せばよい. 逆写像が C^∞ 級であることは, 直接言ってもいいが, 微分が可逆であることを使って逆写像定理を適用してもいい. (ただし, まず $O(n+1)/O(n) \to S^n$ が全単射であることはチェックしておく. この部分は略.) $O(n+1)/O(n)$ の $e\,O(n)$ での接空間 $\mathfrak{m}$ は, $\mathfrak{so}(n+1)$ の中の $\{ [\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & A \end{smallmatrix}] \mid A \in \mathfrak{so}(n) \}$ の補空間であるが, これは $\{ \left[\begin{smallmatrix} 0 & -{}^t x \\ x & 0 \end{smallmatrix}\right] \,\middle|\, x \in \mathbf{R}^n \}$ と取れる. このとき微分は, $\left[\begin{smallmatrix} 0 & -{}^t x \\ x & 0 \end{smallmatrix}\right] \mapsto [\begin{smallmatrix} 0 \\ x \end{smallmatrix}] \in T_{x_0} S^n$ で与えられ, 同型である.

略解 25. (1) 群であることの証明は略. $a = a_1 + i a_2$, $b = b_1 + i b_2$ $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbf{R}$ と表わすと, $|a|^2 - |b|^2 = a_1^2 + a_2^2 - b_1^2 - b_2^2$ である. これを $f(a_1, a_2, b_1, b_2)$ とする. 微分を計算すると $\left(\frac{\partial f}{\partial a_1}\ \frac{\partial f}{\partial a_2}\ \frac{\partial f}{\partial b_1}\ \frac{\partial f}{\partial b_1} \right) = 2 \left(a_1\ a_2\ -b_1\ -b_2 \right)$ となり, これは決して 0 にはならない. よって, 微分は全射. よって $SU(1,1)$ は $\mathbf{R}^4$ の部分多様体である. 積, 逆元が C^∞ 級であることは明らか.

(2) $z \in D$ のとき $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{smallmatrix}\right] z = \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}$ は, 分母が 0 でなく, D に入っていることの証明は略. C^∞ 級であることは定義から明らか.

(3) $H = \{ [\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & \bar{a} \end{smallmatrix}] \in M(2,2,\mathbf{C}) \mid |a|^2 = 1 \} \cong S^1$ である. 写像 $SU(1,1)/H \to D$ が微分同相であることは上の問題 **24** と同様に証明できるので略.

略解 26. $G(r,n) = O(n)/\left(O(r) \times O(n-r)\right)$

略解 27. $T^2/\varphi(\mathbf{R})$ に商位相を入れると, ハウスドルフ空間ではない. (証明は略.)