幾何学I演習問題

担当: 中島 啓　TA: 伊藤公毅, 近藤剛史

2003年6月25日 (水)

問題 28. n 次元射影空間 $\mathbf{R}P^n$ 上の関数

$$f([x_0 : \cdots : x_n]) = \frac{x_0^2}{x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

が C^∞ 級であることを示し, その微分 df_p が消えるような $p \in \mathbf{R}P^n$ をすべて求めよ.

問題 29. n 次元射影空間 $\mathbf{R}P^n$ の中の部分集合

$$M = \{[x_0 : x_1 : \cdots : x_n] \in \mathbf{R}P^n \mid x_0^d + \cdots + x_n^d = 0\}$$

を考える. (d 次 Fermat 超曲面) M が空集合でないときに, M が $\mathbf{R}P^n$ の部分多様体であることを証明せよ.

問題 30. $O(n)$ の連結成分の個数が 2 個であることを証明せよ.

問題 31. (1) $\mathrm{Sym}_n(\mathbf{R})$ で, $n \times n$ の実対称行列の全体, $\mathrm{Sym}_{+,n}(\mathbf{R})$ で, そのうち正定値なものの全体とする. 前者は, ユークリッド空間と同型で, 後者はその開集合である. $\exp\colon \mathrm{Sym}_n(\mathbf{R}) \to \mathrm{Sym}_{+,n}(\mathbf{R})$ が微分同相写像であることを証明せよ. 逆写像 $\log\colon \mathrm{Sym}_{+,n}(\mathbf{R}) \to \mathrm{Sym}_n(\mathbf{R})$ は具体的にはどのように与えられるだろうか？

(2) $\mathrm{Sym}_{+,n}(\mathbf{R})$ に $GL(n,\mathbf{R})$ が

$$(g, A) \mapsto gA\,{}^t g; \qquad g \in GL(n,\mathbf{R}), A \in \mathrm{Sym}_{+,n}(\mathbf{R})$$

によって作用する. このとき A が単位行列であるときを考えて誘導される自然な写像 $GL(n,\mathbf{R})/O(n) \to \mathrm{Sym}_{+,n}(\mathbf{R})$ が微分同相であることを証明せよ.

(3) $O(n) \times \mathrm{Sym}_{+,n}(\mathbf{R}) \to GL(n,\mathbf{R})$ を $(k, A) \mapsto kA$ で定めると, 微分同相であることを示せ. (Cartan 分解)

略解 28. $U_i = \{x_i \neq 0\}$ における非同次座標 $y_0 = x_0/x_i, \dots \widehat{y_i}, \dots, y_n = x_n/x_i$ を考える．すると

$$f([x_0 : \cdots : x_n]) = \begin{cases} \frac{y_0^2}{1+\sum_{k\neq i} y_k^2} & i \neq 0 \text{のとき} \\ \frac{1}{1+\sum_{k\neq i} y_k^2} & i = 0 \text{のとき} \end{cases}$$

である．分母が 0 にならないので，C^∞ 級である．さらにこの座標で微分してみると，$i \neq 0$ のとき

$$\frac{\partial f}{\partial y_j} = -\frac{2y_0^2 y_j}{(1+\sum_{k\neq i} y_k^2)^2} + \frac{2\delta_{j0} y_0}{1+\sum_{k\neq i} y_k^2}$$

であり，$i = 0$ のとき

$$\frac{\partial f}{\partial y_j} = -\frac{2y_j}{(1+\sum_{k\neq i} y_k^2)^2}$$

である．これが 0 になるところを調べると，$y_0 = 0$, もしくは $y_i = 0$ $(\forall i \neq 0)$ であり，同次座標で表わせば，$[0 : x_1 : \cdots : x_n]$ もしくは，$[1 : 0 : \cdots : 0]$ である．(前者が最小値，後者が最大値である．)

略解 29. 上の問題と同様に非同次座標を取ると，U_i 上で方程式は $1 + \sum_{k\neq i} y_k^d = 0$ となる．左辺を $F_i(y_0, \dots, \widehat{y_i}, \dots, y_n)$ とおいて，微分を計算すると，

$$d\begin{pmatrix} y_1^{d-1} & \dots & \widehat{y_i^{d-1}} & \dots & y_n^{d-1} \end{pmatrix}$$

である．したがって微分が全射でない，すなわち 0 でないのは，$y_1 = \cdots = y_n = 0$ のときであるが，これは M の点ではない．したがって M は部分多様体である．

略解 30. 帰納法で示す． $O(1) = \{\pm 1\}$ だから $n = 1$ のときは正しい． 問題 **24** より，$O(n+1)/O(n) = S^n$ で，S^n が連結であることから，$O(n+1)$ の連結成分の数と $O(n)$ の連結成分の数は同じ (詳しい証明は略)．よって任意の n で正しい．

略解 31. (1) exp が全単射であることは線形代数． C^∞ 級は明らか． 逆が C^∞ 級は逆関数定理．

(2) $GL(n, \mathbf{R})/O(n) \to \mathrm{Sym}_{+,n}(\mathbf{R})$ が全単射であることは，線形代数． C^∞ 級は問題 **24**, **25** と同様．

(3) 逆写像は，

$$GL(n, \mathbf{R}) \xrightarrow{\text{転置}} GL(n, \mathbf{R}) \to GL(n, \mathbf{R})/O(n) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Sym}_{+,n}(\mathbf{R}) \xrightarrow[\cong]{\sqrt{\bullet}} \mathrm{Sym}_{+,n}(\mathbf{R})$$

を φ として，$g \mapsto (g\varphi(g)^{-1}, \varphi(g))$ で与えられる．ここで，$\sqrt{\bullet}$ は，$\exp \circ (\frac{1}{2}\text{倍}) \circ \exp^{-1}$ であたえられる写像である．φ は C^∞ 級だから，逆写像も C^∞ 級である．