幾何学I演習問題

担当: 中島 啓　TA: 伊藤公毅, 近藤剛史

2003年7月2日 (水)

先週の問題 **31**(1) は最初に考えていたよりも, 微分の計算が難しいようである. とりあえず次週の小テストの範囲外としておく. ちなみにこの結果は, 非正曲率リーマン多様体における Cartan-Hadamard の定理の特別な場合である.

問題 32. G, H を Lie 群とし, $\varphi\colon H \to G$ を C^∞ 級はめ込みで, 群の準同型でもあるとする. (すなわち, H は G の Lie 部分群である.)

(1) 単位元での微分 $d\varphi_e\colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ は単射であるが, 像 $d\varphi_e(\mathfrak{h})$ が, Lie 括弧 $[\ ,\ ]$ で不変であること, すなわち $X, Y \in \mathfrak{h}$ のとき $[d\varphi_e(X), d\varphi_e(Y)] \in d\varphi_e(\mathfrak{h})$ を示せ.

(2) $d\varphi_e(\mathfrak{h})$ を左移動することによって, G の分布 $\mathcal{D}$ を定義する. C^∞ 級であることを示し, さらに H が積分多様体であることを証明せよ. (H が連結であるとすると, $\mathfrak{h}$ から '極大積分多様体' として再現することができることが分かる.)

問題 33. $\pi\colon S^3 \to \mathbf{C}P^1 = S^2$ を問題 **5** の座標の $n = 1$ の場合とする. 各点 $p \in S^3$ において $d\pi_p\colon T_pS^3 \to T_{\pi(p)}S^2$ を考え, $\operatorname{Ker} d\pi_p$ の直交補空間を $\mathcal{D}_p$ と定義する. ただし, T_pS^3 には, $\mathbf{R}^4$ の部分空間と考えて内積を定義する. このとき $\mathcal{D}$ が方合的でないことを計算によりチェックせよ.

問題 34. $\mathbf{R}^3$ のある開集合 U で定義された C^∞ 級関数 $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$ は,

$$\frac{\partial P}{\partial y} + Q\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial Q}{\partial x} + P\frac{\partial Q}{\partial z}$$

を満たしているとする. このとき連立偏微分方程式

$$\frac{\partial z}{\partial x} = P(x,y,z), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = Q(x,y,z)$$

は, 任意の点 (x_0, y_0, z_0) について初期値 $z(x_0, y_0) = z_0$ を満たす解を ((x_0, y_0) の十分近くで) 持つことを証明せよ.

問題 35. M をコンパクトな C^∞ 級多様体とし, M を覆う有限個の座標系 $\varphi_1\colon U_1 \to V_1, \dots,$ $\varphi_N\colon U_N \to V_N$ と, 開被覆 $U_1, \dots, U_N$ に従属した 1 の分割 $\rho_1, \dots, \rho_N$ を取る. このとき C^∞ 級写像

$$F(x) = (\rho_1(x), \rho_1(x)\varphi_1(x), \dots, \rho_N(x), \rho_N(x)\varphi_N(x)) \in \mathbf{R}^{(n+1)N}$$

が M の $\mathbf{R}^{(n+1)N}$ への埋め込みであることを証明せよ.

略解 32. (1) $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ を左不変ベクトル場の全体と見なして, $\tilde{X} = d\varphi_e(X)$ のときに, $\tilde{X}$ と X が, φ-related であることに注意すれば, 問題 **18** から従う.

(2) $\mathcal{D}$ はすなわち, 原点での値が $d\varphi_e(\mathfrak{h})$ に入る左不変ベクトル場で張られる分布である. このとき主張は明らか.

略解 33. 問題 **21** のように S^3 を長さが 1 の四元数の全体と考えて Lie 群の構造を入れる. 写像 $\pi\colon S^3 \to S^2$ は, $S^2 = S^3/S^1$ と考えて S^3 の左からの積に関して同変な写像になり, 特に $\operatorname{Ker} d\pi_p$ は, 左不変であり, その直交補空間も左不変である. 特に, これらは左不変ベクトル場, すなわち Lie 環の元で張られる. 具体的には, 純虚数の i が $\operatorname{Ker} d\pi$ を張り, j, k が $\mathcal{D}$ を張ることが原点での微分を考えることで分かる. ところが $[j,k] = 2i$ であるから, $\mathcal{D}$ は方合的ではない.

略解 34. U 上の分布を $\mathcal{D} = \operatorname{Span}(\frac{\partial}{\partial x} + P\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y} + Q\frac{\partial}{\partial z})$ により定める. このとき

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} + P\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y} + Q\frac{\partial}{\partial z}\right] = (Q_x + PQ_z - P_y - QP_z)\frac{\partial}{\partial z}$$

であるから, 問題の条件は $\mathcal{D}$ が方合的であることに他ならない. よって Frobenius の定理により各点を通る積分多様体が (局所的には) 存在するが, その (x,y) 平面への射影は微分が同型であり, 逆に $z = z(x,y)$ と表わすことができる. 積分多様体であることを式で書いたものが求める微分方程式の解に他ならない.

略解 35. $F(x) = F(y)$ であるとする. どれかの $\rho_\alpha(x) \neq 0$ であるが, F の定義から $\rho_\alpha(y) \neq 0$ となる. すると $x, y \in U_\alpha$ である. このとき φ_α が U_α では座標であることから, 条件から $x = y$ である. F の微分が単射であることは容易に分かる.