幾何学I演習小テスト

担当: 中島 啓　TA: 伊藤公毅, 近藤剛史

2003年5月7日 (水)

問題 1. 自然な写像 $\pi\colon S^n \to \mathbf{R}P^n$ について, その微分 $d\pi_p\colon T_pS^n \to T_{\pi(p)}\mathbf{R}P^n$ は全ての p について同型写像であることを示せ.

問題 2. 一次元球面 S^1 を $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$, すなわち実数の全体 $\mathbf{R}$ を同値関係 $x \sim y \Longleftrightarrow x - y \in \mathbf{Z}$ で割った空間とする.

(1) S^1 が多様体であることを具体的に座標を取ることによって証明せよ.

(2) 自然数 n に対して, 写像 $f\colon S^1 \to S^1$ を $f(x) = nx$ で定義する. この写像が well-defined であり, C^∞ 級であることを証明せよ.

(3) f の微分が至るところ同型であることを証明せよ.

問題 3. 多項式写像 $f\colon \mathbf{R}P^1 \to \mathbf{R}P^1$ を

$$f([x:y]) = [x^n : a_ny^n + a_{n-1}xy^{n-1} + \cdots + a_0x^n]$$

で定める. ($n \geq 1$, $a_n \neq 0$) f の微分 df_p が消える p をすべて求めよ.

先週の略解 **10** には間違いがあったので注意

略解 1. $S^n = \{(x_0,\dots,x_n) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid x_0^2+\cdots+x_n^2 = 1\}$ とすると, $\pi(x_0,\dots,x_n) = [x_0 : \cdots : x_n]$ である. 問題 **1** のように S^n に座標 $\varphi_i^{\pm}$ を入れ, また $\mathbf{R}P^n$ に非同次座標 ψ_i (すなわち $\psi_i([x_0:\cdots:x_n]) = (x_0/x_i,\dots,\widehat{x_i/x_i},\dots,x_n/x_i)$) を入れると

$$\psi\circ\pi\circ(\varphi_i^{\pm})^{-1}(y_1,\dots,y_n) = \pm(\frac{y_1}{\sqrt{1-\sum_{\alpha=1}^n y_\alpha^2}},\dots,\frac{y_n}{\sqrt{1-\sum_{\alpha=1}^n y_\alpha^2}})$$

となる. これは C^∞ 級写像である. 微分は

$$\frac{\partial(\text{第 }\alpha\text{ 成分})}{\partial y_\beta} = \pm(1-|y|^2)^{-3/2}(y_\beta y_\alpha + (1-|y|^2)\delta_{\alpha\beta})$$

一般に

$$\begin{pmatrix} y_1y_1 & y_1y_2 & \cdots & y_1y_n \\ y_2y_1 & y_2y_2 & \cdots & y_2y_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ y_ny_1 & y_ny_2 & \cdots & y_ny_n \end{pmatrix} + c\times\text{単位行列}$$

の行列式が, $c^n + c^{n-1}|y|^2$ ($|y|^2 = \sum_\alpha y_\alpha^2$) で与えられることは容易に証明できる. 今の場合, $c = 1-|y|^2$ であるから 行列式は $(1-|y|^2)^{n-1}$ であり, 特に 0 ではない. よって微分 $d\pi_p$ は同型である.

(先週の略解のように計算してももちろんよい.)

略解 2. (1) $(a,b)\subset\mathbf{R}$ を, $b-a<1$ となるように取る. すると自然な射影 $\mathbf{R}\to S^1$ を (a,b) に制限したものは単射である. この写像の逆によって S^1 に座標系を定める. 座標変換が C^∞ 級であることは (真面目に書くと大変だが) 容易にチェックできる.

(2) well-definedは明らか. C^∞ 級であることも明らかだが, 真面目に示してみよう. $(0,1/n)$, $(1/2n,3/2n)$, $(1/n,2/n)$, ..., $((n-1)/n,1)$, $((2n-1)/2n,(2n+1)/2n)$(の射影) で定義域の S^1 を覆い, $(0,1)$, $(1/2,3/2)$(の射影) で 値域の S^1 を覆う. それぞれ座標系になっている. f を定義域の座標のそれぞれに制限すると, 値域の方の座標のどちらかに入っていて, おのおのでは一次関数である. よって C^∞ 級である.

(3) 上の一次関数の傾きは 0 でないから正しい.

略解 3. 略