# 幾何学I演習小テスト

担当: 中島 啓　　TA: 伊藤公毅, 近藤剛史

2003年6月4日 (水)

**問題 1.** $\mathbf{R}P^3$ の同次座標を $[x_0 : x_1 : x_2]$, $U = \{x_2 \neq 0\}$ における非同次座標を $(y_0, y_1)$ とする. $(y_0 = x_0/x_2,\ y_1 = x_1/x_2)$ $U$ 上のベクトル場 $X$ を座標ベクトルを用いて

$$X = ay_0 \frac{\partial}{\partial y_0} + by_1 \frac{\partial}{\partial y_1}$$

で定める. $a, b$ は実数である.

(1) $X$ が $\mathbf{R}P^3$ 上のベクトル場に拡張されることを証明せよ.

(2) 上の拡張されたベクトル場の 1 パラメータ変換群を, 同次座標を用いて表せ.

**問題 2.** $X, Y$ を $M$ 上の $C^\infty$ 級ベクトル場とし, $\varphi_t$, $\psi_t$ を対応する 1 パラメータ変換群とする. (簡単のため $X, Y$ は完備とする.)

(1) $F\colon M \to M$ を $C^\infty$ 級微分同相とするとき, $F \circ \varphi_t \circ F^{-1}$ は, ベクトル場 $F_*(X)$ に対応した 1 パラメータ変換群であることを証明せよ.

(2) $[X, Y] = 0$ である必要十分条件は, $(\varphi_t)_*(Y) = Y$ となることであり, さらに $\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t$ がすべての $s, t$ について成り立つことであることを証明せよ.

**問題 3.** $U(n) = \{n \times n$ ユニタリ行列 $\}$ が Lie 群であることを証明せよ. また, Lie 環 $\mathfrak{u}(n)$ を, 単位元 $e$ における接空間としてどのような行列の全体か, 求めよ. また, 次元を計算せよ.

**略解 1.** (1) $V=\{x_1\neq 0\}$ における非同次座標を $(z_0,z_2)$ ($z_0=x_0/x_1$, $z_2=x_2/x_1$ とおくと, 二つの非同次座標の間の座標変換は

$$z_0=\frac{y_0}{y_1},\qquad z_2=\frac{1}{y_1}$$

で与えられる. ベクトル場の変換公式によって計算すると

$$ay_0\frac{\partial}{\partial y_0}+by_1\frac{\partial}{\partial y_1}=(a-b)z_0\frac{\partial}{\partial z_0}-bz_2\frac{\partial}{\partial z_2}$$

となる. これは, このベクトル場が, $V$ で定義されていることを意味する. 同様に, もう一つの非同次座標を $x_2\neq 0$ で取って, そこで定義されていることがチェックできる.

(2) $U$ で, 1-パラメータ変換群を求めると, $(y_0,y_1)\mapsto(e^{ta}y_0,e^{tb}y_1)$ である. $V$ では, $(z_0,z_2)\mapsto(e^{(a-b)t}z_0,e^{-tb}z_2)$ である. 両者が整合するように, 同次座標で表すと, $[x_0:x_1:x_2]\mapsto[e^ax_0:e^bx_1:x_2]$ となる. (これは, $[e^{(a-b)t}x_0:x_1:e^{-tb}x_2]$ と等しい.)

**略解 2.** 略

**略解 3.** $\varphi\colon GL(n,\mathbf{C})\to\mathbf{R}^n\times\mathbf{C}^{n(n-1)/2}$ を

$$\varphi(g)=\text{複素行列}\,(g^t\overline{g})\,\text{の対角成分と, 上三角部分}$$

によって定義する. ここで ${}^t(g^t\overline{g})=\overline{g}^t=\overline{g^t g}$ であるから対角成分は実数であることに注意する. よって値は, 対角成分の $\mathbf{R}^n$ と上三角部分の $\mathbf{C}^{n(n-1)/2}$ がある. 微分は

$$d\varphi_g(X)=(g^t\overline{X}+X^t\overline{g})\ \text{の対角成分と, 上三角部分}$$

である. ただし, $X$ は $n\times n$ 複素行列で, $T_gGL(n,\mathbf{C})$ の元と見なしている. この写像が全射であることを見る. 複素行列の全体のなす 複素ベクトル空間に $(X,Y)=\mathrm{tr}(X^t\overline{Y})$ によって 内積を入れる. $\mathbf{R}^n\times\mathbf{C}^{n(n-1)/2}$ を, 対角成分が実数の上三角行列と同一視し, 上の内積を制限して内積を入れる. そのような行列 $Y$ に対して,

$$\begin{aligned}&(d\varphi_g(X),Y)=\mathrm{tr}\left(((g^t\overline{X}+X^t\overline{g})\ \text{の対角成分と, 上三角部分})^t\overline{Y}\right)\\=\ &\mathrm{tr}\left((g^t\overline{X}+X^t\overline{g})^t\overline{Y}\right)=\left(X,Yg+{}^t\overline{Y}g\right)\end{aligned}$$

となることに注意しよう. もしも全射でないとすると, 任意の $X$ について上の式が $0$ になるような $Y$ があることになる. このとき $Yg+{}^t\overline{Y}g=0$, すなわち $Y+{}^t\overline{Y}=0$ である. ところが $Y$ は, 対角成分が実数の上三角行列行列であったから, これは $Y=0$ を意味する. よって $d\varphi$ は全射である. したがって $U(n)=\varphi^{-1}(1_n)$ （ここで $1_n$ は, $\mathbf{R}^n$ 成分がすべて 1 で $\mathbf{C}^{n(n-1)/2}$ 成分が 0 を意味する）は, 部分多様体である. 積, 逆元が $C^\infty$ 級であることはこれから従う. よって $Lie$ 群である. また, 次元は, 上のことにより $n^2$ である.