第３回幾何学I演習小テスト

担当: 中島 啓　　TA: 伊藤公毅, 近藤剛史

2003年7月9日 (水)

問題 1. n 次元射影空間 $\mathbf{R}P^n$ 上の関数

$$f([x_0 : \cdots : x_n]) = \frac{x_0^2}{x_0^2 + x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

が C^∞ 級であることを示し, その微分 df_p が消えるような $p \in \mathbf{R}P^n$ をすべて求めよ.

問題 2. n 次元射影空間 $\mathbf{R}P^n$ の中の部分集合

$$M = \{[x_0 : x_1 : \cdots : x_n] \in \mathbf{R}P^n \mid x_0^d + \cdots + x_n^d = 0\}$$

を考える. (d 次 Fermat 超曲面) M が空集合でないときに, M が $\mathbf{R}P^n$ の部分多様体であることを証明せよ.

問題 3. G, H を Lie 群とし, $\varphi\colon H \to G$ を単射な C^∞ 級はめ込みで, 群の準同型でもあるとする. (すなわち, H は G の Lie 部分群である.)

(1) 単位元での微分 $d\varphi_e\colon \mathfrak{h} \to \mathfrak{g}$ は単射であるが, 像 $d\varphi_e(\mathfrak{h})$ が, Lie 括弧 $[\ ,\ ]$ で不変であること, すなわち $X, Y \in \mathfrak{h}$ のとき $[d\varphi_e(X), d\varphi_e(Y)] \in d\varphi_e(\mathfrak{h})$ を示せ.

(2) $d\varphi_e(\mathfrak{h})$ を左移動することによって, G の分布 $\mathcal{D}$ を定義する. C^∞ 級であることを示し, さらに H が積分多様体であることを証明せよ. (H が連結であるとすると, $\mathfrak{h}$ から '極大積分多様体' として再現することができることが分かる.)