

幾何学II 演習問題

担当: 中島 啓

2006年12月20日(水)

問題 33. R を可換環とし,

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \rightarrow 0$$

を R 加群の短完全列とする.

(1) 次の a), b), c) はすべて同値であることを示せ. このとき短完全列は分裂するという.

a) $B \cong A \oplus C$ (同型) である.

b) ある R -準同型 $i': C \rightarrow B$ で, $p \circ i' = \text{id}_C$ となるものが存在する.

c) ある R -準同型 $p': B \rightarrow A$ で, $p' \circ i = \text{id}_A$ となるものが存在する.

(2) C が自由 R -加群のとき, 上の短完全列が分裂することを示せ.

問題 34. (1) 問題 12 の完全列を整係数特異コホモロジー群において示せ. また, 整係数特異ホモロジー群については

$$0 \rightarrow \frac{H_q(N; \mathbf{Z})}{\text{Image}(\text{id} - f_*)} \rightarrow H_q(M; \mathbf{Z}) \rightarrow H_{q-1}(N; \mathbf{Z})^{f_*} \rightarrow 0$$

が exact になることを示せ.

(2) 問題 13 の M, Σ_g の整係数ホモロジー群を求めよ.

(3) 問題 19 の M_k の整係数ホモロジー群を求めよ.

(4) 問題 20 の M の整係数ホモロジー群を求めよ.

(5) $\mathbf{R}^3 \setminus S^1$ の整係数ホモロジー群を求めよ.

(6) 上の (2) (5) について, ホモロジー類は自由になるが, 基底になるような特異チェーンを描け.

問題 35. n 次元トーラス $T^n = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n \text{ 個}}$ の整係数ホモロジー群を求めよ.

問題 36. (1) 立方体の辺を合わせたものを X とする. 整係数ホモロジー群を求めよ.

(2) M をメビウスの帯とする. ただし, 無限に伸びたところを有限で切り, 境界付き多様体とする. 相対ホモロジー群 $H_q(M, \partial M; \mathbf{Z})$ を求めよ.

略解 33. (1) a) から b), c) は明らか. b) が成り立つとき, i' が単射であることに注意して, $C \cong \text{Im } i'$ である. すると,

$$B \ni b \mapsto b - i'p(b) \oplus i'p(b) \in \text{Im } i \oplus \text{Im } i'$$

が同型写像を与える. 逆写像は,

$$\text{Im } i \oplus \text{Im } i' \ni i(a) \oplus i'(c) \mapsto i(a) + i'(c) \in B$$

である.

c) が成り立つときも同様に, $A \cong \text{Ker } p$, $C = \text{Ker } p'$ となって, $B \cong \text{Ker } p \oplus \text{Ker } p'$ となることが証明できる.

(2) C の基底を $\{c_\alpha\}_{\alpha \in A}$ とするとき, $p(b_\alpha) = c_\alpha$ となる b_α を取り (完全性よりそのような b_α が存在する),

$$C \cong \bigoplus_{\alpha \in A} R \ni \bigoplus_{\alpha \in A} r_\alpha c_\alpha \mapsto \sum_{\alpha \in A} r_\alpha b_\alpha \in B \quad (r_\alpha \in R)$$

によって $i': C \rightarrow B$ を定義すれば, R -準同型であり, $p \circ i' = \text{id}_C$ となるので, (1) により分裂する.

略解 34. 略

略解 35. $T^n = T^{n-1} \times S^1 = T^{n-1} \times [0, 1]/\sim$ と $f = \text{id}: T^{n-1} \rightarrow T^{n-1}$ に関する mapping torus と見ることにする. このとき **問題 34** により

$$0 \rightarrow H_q(T^{n-1}; \mathbf{Z}) \xrightarrow{i_*} H_q(T^n; \mathbf{Z}) \rightarrow H_{q-1}(T^{n-1}; \mathbf{Z}) \rightarrow 0$$

を得る. これが分裂していることをいいたい. $p: T^n = T^{n-1} \times S^1 \rightarrow T^{n-1}$ を第一成分への射影とし, $p_* i_* = \text{id}_{H_q(T^{n-1}; \mathbf{Z})}$ を Mayer-Vietoris 完全列の定義と **問題 34** の解に従って忠実に計算すれば (詳細略), これが示される. よって

$$H_q(T^n; \mathbf{Z}) = H_q(T^{n-1}; \mathbf{Z}) \oplus H_{q-1}(T^{n-1}; \mathbf{Z})$$

を得る. これは二項係数と同じ帰納関係なので,

$$H_q(T^n; \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}^{\oplus \binom{n}{q}}$$

を得る.

または, 今の場合 $H_q(T^n; \mathbf{Z})$ が自由であることと, 短完全列が分裂することを同時に帰納的に示してもよい. ただし, 一般に $M = N \times S^1$ に関して, $H_q(M; \mathbf{Z}) = H_q(N; \mathbf{Z}) \oplus H_{q-1}(N; \mathbf{Z})$ となることは, そのやり方では示せないので, 上のやり方で示す必要がある.

略解 36. (1) X を底面に平行な面で二つに切り, $X = U \cup V$ とし, U, V は S^1 とホモトピック, $U \cap V$ は 4 点とホモトピックであることに注意して, Mayer-Vietoris 完全列を用いれば,

$$H_q(X; \mathbf{Z}) = \begin{cases} \mathbf{Z} & (q = 0) \\ \mathbf{Z}^5 & (q = 1) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

を得る.

練習問題. $H_1(X; \mathbf{Z})$ の基底となるような特異サイクルのコホモロジー類 $[c_1], \dots, [c_5]$ を作り, 連結準同型 $H_1(X; \mathbf{Z}) \rightarrow H_1(U \cap V; \mathbf{Z})$ を具体的に計算してみよ.

(2) 相対ホモロジーの完全列によって

$$H_q(M, \partial M; \mathbf{Z}) = \begin{cases} \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} & (q = 1) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

を得る.

練習問題. $H_1(M, \partial M; \mathbf{Z})$ の元 $[c]$ で $[c] \neq 0, 2[c] = 0$ となるものを具体的に構成せよ.