幾何学II演習問題

担当: 中島 啓

2006年10月11日(水)

今回は, 計算問題が主なので, 時間内にできなかった場合は, うちでもう一回やってみよう.

問題 4. $X = \mathbf{R}$とする.

$$H_c^p(X,\mathbb{R}) = \begin{cases} \mathbb{R} & p=1 \text{のとき} \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

を証明せよ.

問題 5. αを k 次微分形式とし, $X_1, \dots, X_{k+1}$ をベクトル場とするときに

$$\begin{aligned} d\alpha(X_1,\dots,X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}X_i\alpha(X_1,\dots,\widehat{X_i},\dots,X_{k+1}) \\ &\quad + \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\alpha([X_i,X_j],X_1,\dots,\widehat{X_i},\dots,\widehat{X_j},\dots,X_{k+1}) \end{aligned}$$

を証明せよ. ただし, $\widehat{X_i}$ は, 変数 X_i を省いていることを意味する.

注意. 外積の定義によっては, 左辺に $k+1$ が出てくるものもあるので注意すること。

問題 6. $\mathfrak{g}$を Lie 環とし, Aをその表現とする. すなわち, $\mathfrak{g}$は実ベクトル空間で, Lie 括弧と呼ばれる二項演算 $[\ ,\ ]\colon \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$が定義されており, それは双線形で反可換であり, Jacobi 律

$$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$$

を満たすものである. また, その表現とは線形空間 A であって, 双線形写像$\cdot\colon \mathfrak{g}\times A\to A$ であって, $[X,Y]\cdot a = X\cdot(Y\cdot a) - Y\cdot(X\cdot a)$を満たすものが与えられているものをいう. 例えば, $\mathfrak{g}$を多様体 M 上のベクトル場の全体, Aを C^∞ 級関数の全体 $C^\infty(M)$ として, 作用を微分によるものとすれば, これらの性質を満たす.

このとき, $\alpha\colon \overbrace{W\times W\times\cdots\times W}^{k\text{ 個}} \to A$ で多重線形写像であり, 変数を入れ替えると符号が代わるものとする. (上の例では微分形式が例である.) そのようなものの全体を $\Omega^k(\mathfrak{g};A)$ で表わす.

(1) **問題 4** の式で, $d\alpha\colon \overbrace{W \times W \times \cdots \times W}^{(k+1)\text{ 個}} \to A$ を定義する. ただし, $X_i\alpha(\dots)$ の部分は, $X_i \cdot \alpha(\dots)$ と作用を通じて解釈する. **問題 4** の式は, Lie 括弧 $[\ ,\ ]$ と作用が定義されていれば意味をもつことに注意しよう. このとき $dd\alpha = 0$ を証明せよ.

次に, p 次コホモロジー $H^p(\mathfrak{g}; A)$ を, ドラームコホモロジーのときと同様の式で定義する. (Lie 環のコホモロジーと呼ばれる.)

(2) $H^0(\mathfrak{g}; A)$ は, $\{a \in A \mid X \cdot a = 0\ \forall X \in \mathfrak{g}\}$ に等しいことを示せ.

(3) A が自明な一次元表現, すなわち A は一次元ベクトル空間で, $X \cdot a = 0$ が任意の X, a について成り立つものとする. このとき, $H^1(\mathfrak{g}; A)$ は何か?

問題 7. V を有限次元実ベクトル空間とし, V^* の二つの基底を $\{\theta_i\}$, $\{\theta'_i\}$ とし, 基底の変換行列を

$$\theta'_i = \sum_j a_{ij}\theta_j$$

とする. このとき, $\bigwedge^k V^*$ の二つの基底 $\{\theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_k} \mid i_1 < \cdots < i_k\}$, $\{\theta'_{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta'_{i_k} \mid i_1 < \cdots < i_k\}$ の間の基底の変換行列が, 行列 $A = (a_{ij})$ の小行列式を集めてできる行列 (サイズは, $\binom{\dim V}{k}$) であることを証明せよ.

略解 4. $p = 0$ のとき定数関数でコンパクト台を持つものは 0 しかない．したがって $H^0(X, \mathbf{R}) = 0$.

$p = 1$ のとき, 写像

$$A^1_c(X) \ni \alpha \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} \alpha \in \mathbf{R}$$

を考える．α はコンパクト台を持つから積分できることに注意して, 写像は定義されている．これが全射であることは明らか．完全形式の全体がこの写像の核になることをチェックしよう．$\alpha = d\beta$ $(\beta \in C^\infty_c(X))$ とすると, 部分積分の公式から

$$\int_{-\infty}^{\infty} \alpha = \int_{-R}^{R} \alpha = \beta(R) - \beta(-R) = 0$$

ただし, R は, $[-R, R]$ が α と β の台を含むように十分に大きく取った．また, α がこの写像の核に入っているとし, $\beta \in C^\infty(X)$ を

$$\beta(x) = \int_{-\infty}^{x} \alpha$$

によって定義する．このとき, 条件から十分大きな R に対しては $\beta(x) = 0$ for $x \notin [-R, R]$ である．つまり $\beta \in C^\infty_c(X)$. また定義式から $d\beta = \alpha$ である．

略解 5. 略

略解 6. (1) 略

(2) 定義に従うと, $\alpha \in \Omega^0(\mathfrak{g}; A)$ に対して

$$d\alpha(X) = X \cdot \alpha$$

だから明らか．

(3) $\alpha \in \Omega^1(\mathfrak{g}; A)$ とする．A が自明であるから

$$d\alpha(X, Y) = \alpha([X, Y])$$

である．また $\beta \in \Omega^0(\mathfrak{g}; A)$ に対して, $d\beta = 0$ である．よって

$$H^1(\mathfrak{g}; A) = \{\alpha \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{g}, \mathbf{R}) \mid \alpha([X, Y]) = 0 \ \forall X, Y \in \mathfrak{g}\}$$

である．右辺の元を, $\mathfrak{g}$ の指標という．

略解 7. 略