幾何学II演習問題

担当: 中島 啓

2006年10月25日 (水)

問題 11. 短完全列からコホモロジーの長完全列が導かれることの証明を完成させよ.

問題 12. f を C^∞ 級多様体 N から自分自身への微分同相写像とし, $N\times[0,1]$ に, $(x,0)\sim(f(x),1)$ で生成される同値関係を入れ, $M=N\times[0,1]/\sim$ と定義する. M は C^∞ 級多様体であり, mapping torus と呼ばれる.

(1) このとき

$$0\to\frac{H^{k-1}(N,\mathbf{R})}{\mathrm{Image}(\mathrm{id}-f^*)}\to H^k(M,\mathbf{R})\to H^k(N,\mathbf{R})^{f^*}\to 0$$

という完全系列を導け. ただし f^* は, f の誘導する準同型 $f^*\colon H^k(N,\mathbf{R})\to H^k(N,\mathbf{R})$ であり, $H^{k-1}(N,\mathbf{R})^{f^*}$ は, f^* で固定される部分空間とする.

(2) $N=S^1$, $f(e^{i\theta})=e^{-i\theta}$ として, 上の構成により, M を定義する. M は Klein の壷であることを示して, そのコホモロジーを求めよ.

問題 13. (1) 下図の M のコホモロジー群が

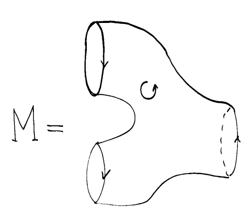
$$H^k(M,\mathbf{R})=\begin{cases}\mathbf{R}^2 & k=1\text{ のとき}\\ \mathbf{R} & k=0\text{ のとき}\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$$

となることを示せ.

(2) 下図の Σ_g のコホモロジー群が

$$H^k(M,\mathbf{R})=\begin{cases}\mathbf{R}^{2g} & k=1\text{ のとき}\\ \mathbf{R} & k=0,2\text{ のとき}\\ 0 & \text{その他}\end{cases}$$

となることを示せ.



gコの穴のあいた 曲面(の表面)

コホモロジーの係数 ‘, $\mathbf{R}$’ は省略することにする.

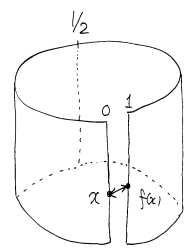
略解 11. 略

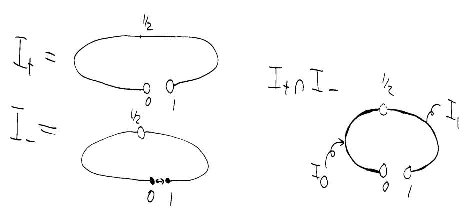
略解 12. (1) 区間 $[0,1]$ を $I_+ = (0,1)$, $I_- = [0,1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$ と分け, 対応して $M = M_+ \cup M_-$ と分ける. $M_+ \ni [(x,t)] \mapsto (x,t) \in N \times I_+$ により, M_+ は $N \times I_+$ と微分同相であり, M_- は

$$M_- \ni [(x,t)] \mapsto \begin{cases} (x,t) & 0 \le t < \frac{1}{2} \text{ のとき} \\ (f^{-1}(x), t-1) & \frac{1}{2} < t \le 1 \text{ のとき} \end{cases} \in N \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$

により, $N \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ と微分同相である. ただし $[(x,0)] = [(f(x),1)]$ の行き先が, 上の場合でも下の場合でも $(x,0)$ となって well-defined であることに注意しよう. $N \times I_+$, $N \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ は, 共に N にホモトピックである. しかし記号を区別するために前者を N_+, 後者を N_- で表わすことにする.

次に, $I_+ \cap I_1 = (0, \frac{1}{2}) \sqcup (\frac{1}{2}, 1)$ となるが, 最初の連結成分を I_0, 後者を I_1 で表わす. このとき $M_+ \cap M_-$ は, 微分同相 $M_+ \cong N \times I_+$ を通じて, $N \times I_0 \sqcup N \times I_1$ と微分同相である. $N \times I_0$, $N \times I_1$ は, 共に N とホモトピックである. しかし記号を区別するために前者を N_0,





後者を N_1 で表わすことにする.

Mayer-Vietoris 完全列より

$$\begin{array}{ccccc} H^k(M) & \longrightarrow & H^k(N_+) \oplus H^k(N_-) & \xrightarrow{\varphi} & H^k(N_0) \oplus H^k(N_1) \\ H^{k-1}(M) & \longrightarrow & H^{k-1}(N_+) \oplus H^{k-1}(N_-) & \xrightarrow[\varphi]{} & H^{k-1}(N_0) \oplus H^{k-1}(N_1) \end{array}$$

を得る. このとき φ を行列表示すると

$$\varphi = \begin{pmatrix} \mathrm{id} & \mathrm{id} \\ \mathrm{id} & f^* \end{pmatrix}$$

となる. (詳細略) よって

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{u \oplus v \in H^k(N_+) \oplus H^k(N_-) \mid u + v = 0, u + f^*(v) = 0\} \cong H^k(N)^{f^*},$$

$$\operatorname{Coker}\varphi = \frac{H^k(N_0) \oplus H^k(N_1)}{\{x \oplus y \in H^k(N_0) \oplus H^k(N_1) \mid x = u + v, y = u + f^*(v)\}} \cong \frac{H^k(N)}{\operatorname{Image}(\mathrm{id} - f^*)}$$

を得る. 従って結論を得る.

(2) Klein の壷は $[0,1] \times [0,1]$ の上下を普通に貼り合わせ, 左右をひっくり返して貼り合わせたものである. これは, 与えられた N, f から M を作るやり方に他ならない. このとき $f^*\colon H^0(S^1) \to H^0(S^1)$ は恒等写像であり, $f^*\colon H^1(S^1) \to H^1(S^1)$ は, 向きを逆にすることから -1 倍する写像である. これから, (1) の完全列により, $H^0(M) \cong \mathbf{R}$ (これは計算せずとも連結から直ちに分かる), $H^1(M) \cong \mathbf{R}$, $H^2(M) \cong 0$ が従う.

略解 13. (1) M を S^2 から三枚の円板 D_1, D_2, D_3 を除いたものと思う. $D_1 \cup D_2 \cup D_3$ を含む開集合 U と, M を含む開集合 V で S^2 を覆う. V は, M とホモトピックになるように取っておく. U は, 三つの $\mathbb{R}^3$ の非交和とホモトピックであり, 特に $H^k(U) \cong \mathbf{R}^3$ $(k = 0)$, $\cong 0$ (k その他) である. また, $U \cap V$ は, 三つの S^1 の非交和とホモトピックであり, 特に $H^k(U) \cong \mathbf{R}^3$ $(k = 0, 1)$, $\cong 0$ (k その他) である. そこで, Mayer-Vietoris 完全列を考える.

$$\begin{tikzcd}
H^2(S^2) \arrow[r] & H^2(M) \arrow[r] & 0 \\
0 = H^1(S^2) \arrow[r] & H^1(M) \arrow[r] & H^1(U \cap V) \cong \mathbf{R}^3 \arrow[ull, "d^*"]
\end{tikzcd}$$

よって, $H^1(M) \cong \operatorname{Ker} d^*$, $H^2(M) \cong \operatorname{Coker} d^*$ である. Stokes の定理を用いて d^* が 0 でないことを示して (詳細略), 結論を得る.

(2) 簡単のため, $g = 1$ とする. 一般の場合は帰納法で示す. M を二つ貼り合わせて, Σ_1 から二つの円板 D_1, D_2 を抜いたものを作る. このとき Mayer-Vietoris 完全列を考える.

$$\begin{tikzcd}
H^2(\Sigma_1 \setminus D_1 \cup D_2) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \\
H^1(\Sigma_1 \setminus D_1 \cup D_2) \arrow[r] & H^1(M) \oplus H^1(M) \arrow[r, "\varphi_1"'] & H^1(S^1) \oplus H^1(S^1) \arrow[ull, "d_1^*"] \\
H^0(\Sigma_1 \setminus D_1 \cup D_2) \arrow[r] & H^0(M) \oplus H^0(M) \arrow[r, "\varphi_0"'] & H^0(S^1) \oplus H^0(S^1) \arrow[ull, "d_0^*"]
\end{tikzcd}$$

$\operatorname{Coker}\varphi_1 = 0$, $\operatorname{Ker}\varphi_1 \cong \mathbf{R}^2$, $\operatorname{Coker}\varphi_0 \cong \mathbf{R}$ をチェックして,

$$H^0(\Sigma_1 \setminus D_1 \cup D_2) \cong \mathbf{R}, \qquad H^1(\Sigma_1 \setminus D_1 \cup D_2) \cong \mathbf{R}^3, \qquad H^2(\Sigma_1 \setminus D_1 \cup D_2) \cong 0$$

が示される. (詳細略) 次に D_1, D_2 を貼って, 再び Mayer-Vietoris 完全列を考える.

$$\begin{tikzcd}
H^2(\Sigma_1) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \\
H^1(\Sigma_1) \arrow[r] & H^1(\Sigma_1 \setminus D_1 \cup D_2) \arrow[r, "\varphi_1"'] & H^1(S^1) \oplus H^1(S^1) \arrow[ull, "d_1^*"] \\
H^0(\Sigma_1) \arrow[r] & H^0(\Sigma_1 \setminus D_1 \cup D_2) \oplus H^0(D_1) \oplus H^0(D_2) \arrow[r, "\varphi_0"'] & H^0(S^1) \oplus H^0(S^1) \arrow[ull, "d_0^*"]
\end{tikzcd}$$

$\operatorname{Coker}\varphi_1 \cong \mathbf{R}$, $\operatorname{Ker}\varphi_1 \cong \mathbf{R}^2$, $\operatorname{Coker}\varphi_0 = 0$ をチェックして (詳細略), 結論を得る.