幾何学II演習問題

担当: 中島 啓

2006年11月15日 (水)

問題 18. $f\colon S^2 \to T^2$ を C^∞ 級写像とする．このとき, $H^2(T^2, \mathbf{R}) \xrightarrow{f^*} H^2(S^2, \mathbf{R})$ は 0 写像であることを証明せよ．(平成19年度大学院入試・数学Iより)

問題 19. $\mathbf{R}^2$ から k 個の相異なる点を除いた補集合を M_k とするとき, $H^*(M_k, \mathbf{R})$, $H_c^*(M_k, \mathbf{R})$ を求めよ.

また, コホモロジーの基底を取り, 基底の元のそれぞれについて, そのポアンカレ双対となる部分多様体を構成せよ.

問題 20. $\mathbf{C}^2$ から二本の相異なる複素直線 A, B を除いた補集合を M とする．このとき, $H^*(M, \mathbf{R})$, $H_c^*(M, \mathbf{R})$ を, A と B が交わるとき, 交わらないときのそれぞれの場合について求めよ.

また, コホモロジーの基底を取り, 基底の元のそれぞれについて, そのポアンカレ双対となる部分多様体を構成せよ.

問題 21. $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ とし, $f\colon S^2 \to S^2$ を $f(x, y, z) = (-x, -y, -z)$ で定義する．$f^2 = \mathrm{id}$ であり, $\{\pm 1\}$ が S^2 に作用する．S^2 を $\{\pm 1\}$ で割った商空間は実射影平面 $\mathbf{R}P^2$ である. ($\mathbf{R}P^2$ は, $\mathbf{R}^3$ の中の原点を通る直線の全体であるから, 直線と S^2 の交わりの二点を取って, その二点を一つの点と見なす商空間をとれば実射影平面になる.) 問題16の手法を用いて $H^*(\mathbf{R}P^2, \mathbf{R})$ を計算せよ．そして $\mathbf{R}P^2$ については Poincaré 双対性が成立していないことから, 向きづけ可能でないことを観察せよ.

コホモロジーの係数 ‘$,\mathbf{R}$’ は省略することにする.

略解 18. $T^2 = S^1 \times S^1$ を $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ と見なして, $\mathbf{R}^2$ の座標を x_1, x_2 とすると, $H^2(T^2) \cong \mathbf{R}[dx_1 \wedge dx_2]$ であった. このとき, $H^*(T^2) \xrightarrow{f^*} H^*(S^2)$ は環準同型であること, すなわち

$$f^*([\alpha] \wedge [\beta]) = f^*[\alpha] \wedge f^*[\beta]$$

であることに注意すると, $f^*[dx_1 \wedge dx_2] = f^*[dx_1] \wedge f^*[dx_2]$ である. ところが, S^2 の $H^1(S^2)$ は 0 であるから, $f^*[dx_1] = f^*[dx_2] = 0$ である. したがって $f^*[dx_1 \wedge dx_2] = 0$ が成り立つ.

略解 19. $M_k = \mathbf{R}^2 \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$ とし, p_k の回りの十分小さな開円板 U_k を, 他の点とは交わらないように取る. $M_{k-1} = M_k \cup U_k$ である. $M_k \cap U_k = U_k \setminus \{p_k\}$ であるが, これは S^1 を変形レトラクトに含む. Mayer-Vietoris 完全列により

$$\begin{tikzcd}
H^2(M_{k-1}) \arrow[r] & H^2(M_k) \oplus H^2(U_k) \arrow[r] & H^2(S^1) \\
H^1(M_{k-1}) \arrow[r] & H^1(M_k) \oplus H^1(U_k) \arrow[r] & H^1(S^1) \arrow[ull, "d^*"'] \\
H^0(M_{k-1}) \arrow[r] & H^0(M_k) \oplus H^0(U_k) \arrow[r, "\varphi"'] & H^0(S^1) \arrow[ull, "d^*"']
\end{tikzcd}$$

となる. $H^i(U_k) = \mathbf{R}$ ($i = 0$ のとき) $= 0$ (その他のとき), $H^i(S^1) = \mathbf{R}$ ($i = 0,1$ のとき) $= 0$ (その他のとき), $H^i(M_0) = \mathbf{R}$ ($i = 0$ のとき) $= 0$ (その他のとき), に注意すると, まず一番上の行のコホモロジーがすべて 0 であることが, 帰納法で分かる. 次に, $\varphi\colon H^0(M_k) \oplus H^0(U_k) \to H^0(S^1)$ は全射である. (何故か?) したがって, $d^*\colon H^0(S^1) \to H^1(M_{k-1})$ は 0 写像である. したがって

$$0 \to H^1(M_{k-1}) \to H^1(M_k) \to H^1(S^1) \to 0$$

という短完全列を得るので, 帰納法によって $H^1(M_k)$ は, $\mathbf{R}^k$ となる. $H^*_c(M_k)$ については, M_k が向きづけ可能なので, Poincaré 双対性を使えばよい.

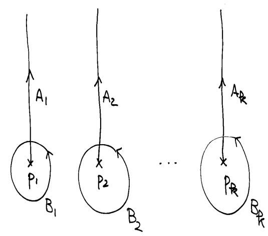
次にポアンカレ双対を調べる. $H^0(M_k)$ については M_k 自身, $H^2_c(M_k)$ については, 一点 p (どの点でもよい) である. そこで $H^1(M_k)$, $H^1_c(M_k)$ について考える. 上の証明から, $H^1(U_i \setminus \{p_i\}) \cong H^1(S^1)$, $H^1_c(U_i \setminus \{p_i\}) \cong H^0(S^1)$ の基底を取って, それを M_k に引き戻 (H^1_c の場合は 0 で拡張) したものを並べたものが基底である. p_i の回りで極座標 (r_i, θ_i) を取る. さらに r_i を, p_i の回りでは 0, U_i の境界付近では定数 1 になるように, 少し変形しておく. (ただし, θ_i 方向には変形しない.) これを r'_i と書く. すると $\int_{r_i=0}^{r_i=\infty} dr'_i = 1$ となる. さらに

$$\int_{U_i \setminus \{p_i\}} \frac{d\theta_i}{2\pi} \wedge dr'_i = \int_{r_i=0}^{\infty} \oint_{\theta_i=0}^{\theta_i=2\pi} \frac{d\theta_i}{2\pi} \wedge dr'_i = 1$$

である. このとき, $[\frac{d\theta_i}{2\pi}] \in H^1(M_k)$, $[dr'_i] \in H^1_c(M_k)$ が基底となる. (詳細略) 下図のように A_i, B_i を取ると

$$\int_{A_j} dr'_i = \delta_{ij}, \qquad \int_{B_j} \frac{d\theta_i}{2\pi} = \delta_{ij}$$

となっているから, A_i は $[\frac{d\theta_i}{2\pi}]$, B_i は $[dr'_i]$ のそれぞれポアンカレ双対になっている.



略解 20. $\mathbf{C}^2 \setminus (A \cup B) = (\mathbf{C}^2 \setminus A) \cap (\mathbf{C}^2 \setminus B)$ である．そして，$(\mathbf{C}^2 \setminus A) \cup (\mathbf{C}^2 \setminus B)$ は，A と B が交わる場合は $\mathbf{C}^2 \setminus \{p\}$，そうでない場合は $\mathbf{C}^2$ 全体となる．(p は A と B の交わりの点) これを N で表わす．

まず，$\mathbf{C}^2 \setminus A$ のコホモロジーを求める．$A = \{z_1 = 0\}$ とすると，$\mathbf{C}^2 \setminus A \to \{z_2 = 0\} \setminus \{z_1 = z_2 = 0\}$ という変形レトラクトが存在する．したがって

$$H^k(\mathbf{C}^2 \setminus A) \cong H^k(\mathbf{C} \setminus \{0\}) \cong H^k(S^1)$$

であり，$k = 0, 1$ のときに $\mathbf{R}$ で，それ以外のときには 0 である．

Mayer-Vietoris 完全列により

$$\begin{tikzcd}
H^i(N) \arrow[r] & H^i(\mathbf{C}^2 \setminus A) \oplus H^i(\mathbf{C}^2 \setminus B) \arrow[r] & H^i(M) \\
H^{i-1}(N) \arrow[r] & H^{i-1}(\mathbf{C}^2 \setminus A) \oplus H^{i-1}(\mathbf{C}^2 \setminus B) \arrow[r] & H^{i-1}(M) \arrow[ull, "d^*"']
\end{tikzcd}$$

が成り立つ．

まず，A と B が交わらないときは，$N = \mathbf{C}^2$ なので，$H^i(M) \cong H^i(\mathbf{C}^2 \setminus A) \oplus H^i(\mathbf{C}^2 \setminus B)$ $(i > 0)$ が分かる．したがって上と合わせて，$H^i(M) = \mathbf{R}^2$ ($i = 1$ のとき)，$= 0$ ($i > 1$ のとき) が分かる．M は連結だから $H^0(M) = \mathbf{R}$ も分かる．

次に A と B が交わるときは，$N = \mathbf{C}^2 \setminus \{p\}$ である．すると N は，S^3 を変形レトラクトに持つから，$H^i(N) = \mathbf{R}$ ($i = 0, 3$ のとき) $= 0$ (その他のとき) となる．そこで，上の Mayer-Vietoris 完全列を見ると，$i = 2$ として，$H^1(M) \cong H^1(\mathbf{C}^2 \setminus A) \oplus H^1(\mathbf{C}^2 \setminus B) = \mathbf{R}^2$ を得る．また，$i = 3$ の場合を考えると，

$$0 \to H^2(M) \to H^3(N) \to 0$$

を得る．したがって，$H^2(M) \cong \mathbf{R}$ である．M は連結だから，$H^0(M) \cong \mathbf{R}$ であり，その他の次数のコホモロジー—がすべて消えていることも明らかである．$H_c^*(M)$ は，Poincaré 双対性より求まる．

Poincaré 双対については演習としておく．

略解 21. 問題 16 により，

$$H^*(\mathbf{R}P^2) = H^*(S^2)^{f^*}$$

である．問題 14(2) により，f の写像度は -1 である．すなわち，$H^*(S^2)$ に f^* は (-1) 倍で作用する．したがって，$H^2(S^2)^{f^*} = 0$ である．$H^0(S^2)$ への作用は恒等写像である．(何故か?) したがって $H^k(\mathbf{R}P^2) = \mathbf{R}$ ($k = 0$ のとき)，$= 0$ (そうでないとき) である．