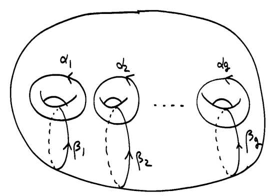
幾何学II演習問題

担当: 中島 啓

2006 年 11 月 22 日 (水)

問題 22. (1) 二次元トーラス $T^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ に対して, コホモロジーの基底を $[1] \in H^0(T^2, \mathbf{R})$, $[dx_1]$, $[dx_2] \in H^1(T^2, \mathbf{R})$, $[dx_1 \wedge dx_2] \in H^2(T^2, \mathbf{R})$ で定義する. このとき, T^2 の部分多様体で, そのポアンカレ双対が, 基底のそれぞれの元になるようなものを構成せよ.

(2) 問題 13 の Σ_g のコホモロジーについて, そのポアンカレ双対が $H^1(\Sigma_g, \mathbf{R})$ の基底になるように $2g$ 個の部分多様体を, 下図のように取れることを証明せよ.



問題 23. 1 次元複素射影空間 $\mathbf{C}P^1 = \{[z_0 : z_1] \mid (z_0, z_1) \neq (0,0)\}$ を考える. $U_0 = \{z_0 \neq 0\}$, $U_1 = \{z_1 \neq 0\}$ という二枚の座標近傍を取り, $\mathbf{C}P^1$ 上のベクトル束 E を $U_0 \times \mathbf{C}$ と $U_1 \times \mathbf{C}$ を

$$([z_0 : z_1], v) \mapsto ([z_0 : z_1], \left(\frac{z_1}{z_0}\right)^k v)$$

という変換関数で貼り合わせて定義する. ただし k は整数である.

(1) $\mathbf{C}P^1$ の接束は, k がいくつのベクトル束と同型か？ またトートロジカル直線束

$$L = \{([z_0 : z_1], (v_0, v_1)) \in \mathbf{C}P^1 \times \mathbf{C}^2 \mid (v_0, v_1) = \lambda(z_0, z_1) \text{ for some } \lambda \in \mathbf{C}\}$$

は, k がいくつのベクトル束と同型か？

(2) E から 0 切断 (の像) を除いた多様体を P として, そのコホモロジーを計算せよ.

問題 24. M は向きづけられており, 有限な good cover を持つとする. カレントのチェイン複体 $\mathcal{D}^*(M)$ の定めるコホモロジ—とドラームコホモロジーが同型であることを次のようにして証明せよ.

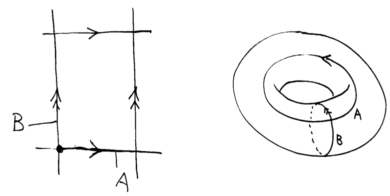
(1) カレント $\mathcal{D}^*(M)$ について Mayer-Vietoris 完全列を証明せよ.

(2) $M \times \mathbf{R}$ のコホモロジーと, M のコホモロジーを関係させる Poincaré の補題を, カレントの場合に証明せよ.

(1), (2) から, Poincaré 双対性の証明と同様に主張が従う.

コホモロジーの係数 ‘, $\mathbf{R}$’ は省略することにする．

略解 22. (1) $1 \in H^0(T^2)$ のポアンカレ双対は T^2, $[dx_1 \wedge dx_2] \in H^2(T^2)$ のポアンカレ双対は, 一点 p である．次に下図のように部分多様体 A, B を定義する．

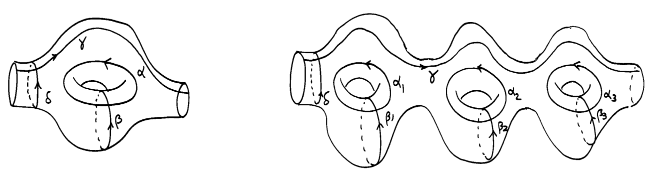


すると

$$\int_A dx_1 = 1, \qquad \int_A dx_2 = 0, \qquad \int_B dx_1 = 0, \qquad \int_B dx_2 = 1, \qquad \int_{T^2} dx_1 \wedge dx_2 = 1$$

であるから, A は $[dx_2]$ のポアンカレ双対, B は $-[dx_1]$ のポアンカレ双対である．

(2) 問題 13 の証明を詳しく見直して, $H^1(\Sigma_g)$ の基底を適当に作り, そのポアンカレ双対を作ればよい． 例えば, まず $H^1(\Sigma_1 \setminus D_1 \cup D_2)$ については下図の部分多様体 α, β, γ, $H_c^1(\Sigma_1 \setminus D_1 \cup D_2)$ については下図の部分多様体 α, β, δ を取ればよい．(詳細略) これを g 個貼り合わせて, 最後に円板 2 枚を貼り合わせて Σ_g はできる．このとき, Mayer-Vietoris 完全列を書いて, 基底を丁寧に書いてみる．一つピースを貼り合わせるとき, 新しいピースにあった α, β はそのまま生き残り, γ は前からあったピースの γ とつなげられる．そして新しいピースの δ は消される．(下の図の右側参照) 最後に円板 2 枚を貼り合わせるとき, 一本につなげられていた γ と, 最後に一個だけのこって残っていた一番最初の δ とは消えてしまう．(詳細略) すると結局最後に残るのは, 問題の図のようになる．



略解 23. (1) まず接束のときを調べる．U_0 上で, 座標 $w_0 = z_1/z_0$, U_1 上で $w_1 = z_0/z_1$ を取る．$U_0 \cap U_1$ 上では $w_1 = 1/w_0$ である．$w_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$ $(\alpha = 0, 1)$ とするとき

$$a \left.\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\right|_{[z_0:z_1]} + b \left.\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right|_{[z_0:z_1]} \xrightarrow[\cong]{\varphi_\alpha} ([z_0 : z_1], (-1)^\alpha(a + bi))$$

によって, 局所自明化 $\varphi_\alpha \colon T\mathbf{C}P^1|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbf{C}$ を定義する． $w_1 = x_1 + iy_1 = 1/w_0 = (x_0 - iy_0)/(x_0^2 + y_0^2)$ に注意して,

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_0} = \frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{x_0}{x_0^2 + y_0^2}\right) = -\frac{x_0^2 - y_0^2}{(x_0^2 + y_0^2)^2}$$

を得る．同様に

$$\frac{\partial x_1}{\partial y_0} = -\frac{2x_0y_0}{(x_0^2+y_0^2)^2}, \quad \frac{\partial y_1}{\partial x_0} = \frac{2x_0y_0}{(x_0^2+y_0^2)^2}, \quad \frac{\partial y_1}{\partial y_0} = -\frac{x_0^2-y_0^2}{(x_0^2+y_0^2)^2}$$

となる．したがって座標変換公式は

$$\begin{aligned} a\frac{\partial}{\partial x_0} + b\frac{\partial}{\partial y_0} &= a\left[\frac{\partial x_1}{\partial x_0}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial y_1}{\partial x_0}\frac{\partial}{\partial y_1}\right] + b\left[\frac{\partial x_1}{\partial y_0}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial y_1}{\partial y_0}\frac{\partial}{\partial y_1}\right] \\ = \ -&\frac{1}{(x_0^2+y_0^2)^2}\left[\left(a(x_0^2-y_0^2)+2bx_0y_0\right)\frac{\partial}{\partial x_1} + \left(-2ax_0y_0+b(x_0^2-y_0^2)\right)\frac{\partial}{\partial y_1}\right] \end{aligned}$$

となる．したがって $(\varphi_1\circ\varphi_0^{-1})([z_0:z_1], a+bi)$ の第二成分は

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(x_0^2+y_0^2)^2}\left[\left(a(x_0^2-y_0^2)+2bx_0y_0\right) + \left(-2ax_0y_0+b(x_0^2-y_0^2)\right)i\right] \\ =\ &\frac{a+bi}{(x_0^2+y_0^2)^2}\left(x_0^2-y_0^2-2ix_0y_0\right) = (a+bi)\frac{1}{w_0^2} = (a+bi)\left(\frac{z_0}{z_1}\right)^2 \end{aligned}$$

である．したがって, $k=-2$ のベクトル束と同型である．

次にトートロジカル直線束のときを考える． $\varphi_0\colon L|_{U_0} \xrightarrow{\cong} U_0\times\mathbf{C}$ を $([z_0:z_1],(v_0,v_1)) \mapsto ([z_0:z_1],v_0)$, $\varphi_1\colon L|_{U_1} \xrightarrow{\cong} U_1\times\mathbf{C}$ を $([z_0:z_1],(v_0,v_1)) \mapsto ([z_0:z_1],v_1)$ によって定義する．逆写像はそれぞれ, $([z_0:z_1],v) \mapsto ([z_0:z_1],(v,\frac{z_1}{z_0}v))$, $([z_0:z_1],w) \mapsto ([z_0:z_1],(\frac{z_0}{z_1}w,w))$ であり, 確かに微分同相になっていることに注意する．このとき変換関数

$$(U_0\cap U_1)\times\mathbf{C} \xrightarrow{\varphi_1\circ\varphi_0^{-1}} (U_0\cap U_1)\times\mathbf{C}$$

は, 第一成分が id で, 第二成分が

$$v \mapsto w = \frac{z_1}{z_0}v$$

と移っており, $k=1$ のベクトル束に同型である．

(2) P を $\pi^{-1}(U_0)$ と $\pi^{-1}(U_1)$ に分けて Mayer-Vietoris 完全列を使う． $\pi^{-1}(U_i) \underset{\cong}{\xrightarrow{\phi_i}} U_i\times(\mathbf{C}\setminus\{0\})$ は, S^1 を変形レトラクトに含むので, H^0, H^1 が $\mathbf{R}$ で, その他は 0 である．また, $\pi^{-1}(U_0)\cap\pi^{-1}(U_1)$ は, ϕ_0 を通じて $(U_0\setminus\{0\})\times(\mathbf{C}\setminus\{0\})$ と微分同相であり, $S^1\times S^1$ を変形レトラクトに含む．したがって, H^0, H^2 が $\mathbf{R}$ で, H^1 が二次元である．

$$\begin{tikzcd}
H^3(P) \arrow[r] & 0\oplus 0 \arrow[r] & 0 \\
H^2(P) \arrow[r] & 0\oplus 0 \arrow[r] & H^2(\pi^{-1}(U_0)\cap\pi^{-1}(U_1)) \arrow[ull, "d^*"] \\
H^1(P) \arrow[r] & H^1(\pi^{-1}(U_0))\oplus H^1(\pi^{-1}(U_1)) \arrow[r, "\alpha"'] & H^1(\pi^{-1}(U_0)\cap\pi^{-1}(U_1)) \arrow[ull, "d^*"] \\
H^0(P) \arrow[r] & H^0(\pi^{-1}(U_0))\oplus H^0(\pi^{-1}(U_1)) \arrow[r, "\beta"'] & H^0(\pi^{-1}(U_0)\cap\pi^{-1}(U_1)) \arrow[ull, "d^*"]
\end{tikzcd}$$

を得る．$H^3(P) \cong \mathbf{R}$ が直ちに分かる．連結性を考えれば β は全射であるから，$H^1(P) \cong \operatorname{Ker}\alpha$, $H^2(P) \cong \operatorname{Coker}\alpha$ である．

そこで α を調べる．コホモロジーの自然な基底を取っておく．(取り方の説明は略.) まず $H^1(\pi^{-1}(U_0)) \to H^1(\pi^{-1}(U_0)\cap\pi^{-1}(U_1))$ は，包含写像 $(\mathbf{C}\setminus\{0\})\times(\mathbf{C}\setminus\{0\}) \hookrightarrow \mathbf{C}\times(\mathbf{C}\setminus\{0\})$ から誘導される $H^1(\mathbf{C}\times(\mathbf{C}\setminus\{0\})) \to H^1((\mathbf{C}\setminus\{0\})\times(\mathbf{C}\setminus\{0\}))$ に等しく，行列表示すれば $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ となる．

一方，$H^1(\pi^{-1}(U_1)) \to H^1(\pi^{-1}(U_0)\cap\pi^{-1}(U_1))$ は，包含写像 $(\mathbf{C}\setminus\{0\})\times(\mathbf{C}\setminus\{0\}) \hookrightarrow \mathbf{C}\times(\mathbf{C}\setminus\{0\})$ の前に C^∞ 写像

$$(\mathbf{C}\setminus\{0\})\times(\mathbf{C}\setminus\{0\}) \to (\mathbf{C}\setminus\{0\})\times(\mathbf{C}\setminus\{0\}); \qquad (z,v)\mapsto(z,z^kv)$$

を合成したものに等しい．これを行列表示すると $\begin{bmatrix}k\\1\end{bmatrix}$ となる．したがって，$k=0$ のときは α は階数 1 で，$k\neq 0$ のときは α は可逆となる．よって $k=0$ のとき $H^1(P)=\mathbf{R}$, $H^2(P)=\mathbf{R}$, $k\neq 0$ のとき $H^1(P)=0$, $H^2(P)=0$ である．

略解 24. 略