幾何学I テスト

担当: 中島 啓

2007年7月25日 (水) 10:30 〜 14:30

問題 1. V を $\mathbf{R}$ 上の有限次元ベクトル空間とし、$v \in V^*$ を 0 でないベクトルとする。v を外積する線形写像

$$\textstyle\bigwedge^k V^* \underset{\underset{f_k}{\shortparallel}}{\xrightarrow{v\wedge\bullet}} \bigwedge^{k+1} V^* \underset{\underset{f_{k+1}}{\shortparallel}}{\xrightarrow{v\wedge\bullet}} \bigwedge^{k+2} V^*$$

を考える。このとき右の線形写像 f_{k+1} の核 (kernel) $\operatorname{Ker} f_{k+1}$ は、左の線形写像 f_k の像 (image) $\operatorname{Im} f_k$ に等しいことを証明せよ。

問題 2. $n \times n$ 実行列の全体を $M(n,n;\mathbf{R})$ で表わし、$\mathbf{R}^{n^2}$ と同一視することで多様体の構造を入れる。また n 次単位行列を I_n で表わす。

$O(n)$ を n 次直交群とする。すなわち、$n \times n$ 実行列 g で、その転置行列 ${}^t g$ が、逆行列 g^{-1} になっているものの全体 $O(n) = \{g \in M(n,n;\mathbf{R}) \mid g\, {}^t g = I_n\}$ である。$O(n)$ が $M(n,n;\mathbf{R})$ の部分多様体であることを示せ。また単位行列 I_n における $O(n)$ の接空間 $T_{I_n}O(n)$ を $M(n,n;\mathbf{R})$ の部分空間として求めよ。

問題 3. M を n 次元のコンパクトな C^∞ 級多様体とし、$f\colon M \to \mathbf{R}^n$ を C^∞ 級写像であるとする。($\dim M = \dim \mathbf{R}^n$ に注意せよ。) f は、はめ込みにはならないこと、すなわち、f の微分 $df_x\colon T_xM \to T_{f(x)}\mathbf{R}^n$ が、M 上のすべての点 x において同型であることはありえないことを示せ。

問題 4. $\mathbf{C}P^1$ の非同次座標 $\varphi\colon U_0 = \{[z_0 : z_1] \mid z_0 \neq 0\} \to \mathbf{C};\ [z_0 : z_1] \mapsto z_1/z_0$ を考える。$\mathbf{C}$ 上で $z = x + iy$ と表わしたときに、その上の二次微分形式を

$$\omega = \frac{dx \wedge dy}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

によって定義する。

(1) ω は、$\mathbf{C}P^1$ 上の二次微分形式に拡張されることを証明せよ。

(2) $\mathbf{C}P^1$ には、非同次座標から向きが入ることをチェックせよ。ただし、$\mathbf{C}$ には、$z = x+iy$ と表わして (x, y) によって向きを入れる。

(3) (1) で拡張された ω に対して

$$\int_{\mathbf{C}P^1} \omega$$

を計算せよ。

問題 5. $\mathbf{R}^2$ から原点を除いた領域 $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ で定義された関数 $f(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}$ を考える。

(1) 原点を除いた領域で、$\Delta f = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} f + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} f = 0$ が成り立つことを示せ。

(2) C_ε を原点を中心とする半径 ε の円周とする。反時計回りに向きをいれておく。このとき、$\displaystyle\int_{C_\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial x} dy - \frac{\partial f}{\partial y} dx$ を計算せよ。

(3) D を原点を含む下の図のような領域とし、その境界を C とし、反時計回りに向きを入れる。このとき、$\displaystyle\int_{C} \frac{\partial f}{\partial x} dy - \frac{\partial f}{\partial y} dx$ を計算せよ。

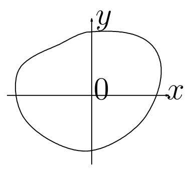

図 1: 原点を含む領域