幾何学I演習問題

担当: 中島 啓　TA: 木村嘉之, 森谷駿二, 山川大亮

2007年6月27日(水)

先週の演習問題の略解は
`http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~nakajima/Lecture/07_Kika1.html`
を参照のこと.

問題 58. (1) n 次元 C^∞ 級多様体 M 上に n 次微分形式 ω で、M 上のすべての点 p で、ω_p が 0 とならないものが与えられたとする。このとき、M 上に向きが次の条件を満すように与えられることを示せ。

向きを与える座標 $\varphi_\alpha\colon U_\alpha \to U'_\alpha$ によって $\omega = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_N$ と表わしたときに $f > 0$ となる。

(2) 逆に、M に向きが与えられたとき、上の性質をみたすような、いたるところ 0 にならない n 次微分形式 ω が存在することを証明せよ。

問題 59. n 次元球面 S^n は向きづけ可能であることを証明せよ。

問題 60. (1) メビウスの帯が向きづけ可能でないことを証明せよ。
(2) 2次元実射影空間 $\mathbf{R}P^2$ は向きづけ可能でないことを証明せよ。
ヒント: $\mathbf{R}P^2$ は、メビウスの帯の端に円板を貼って得られることを、まず示せ。

問題 61. (1) **問題 33** の状況で、$n = m$ の場合を考え、写像 $f\colon \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ は同じように各変数について正則であるとする。このとき、$z_j = x_j + iy_j$ によって $\mathbf{C}^n$ に座標を $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ によって入れる。このとき f のヤコビ行列の行列式が常に非負であることを証明せよ。
(2) 複素射影空間 $\mathbf{C}P^n$ が向きづけ可能であることを証明せよ。

問題 62. f を S^1 上の C^∞ 級関数とし、**問題 48** のように dx を取って、S^1 上の1次微分形式 $\alpha = f(x)dx$ を考える。このとき $\alpha = dg$ となるような S^1 上の C^∞ 級関数 g が存在するための必要十分条件は、$\int_{S^1} \alpha = \int_0^1 f(x)dx = 0$ であることを証明せよ。
必要条件であることは、来週紹介する予定のストークスの定理の特別な場合である。

問題 63. σ-コンパクトな位相空間は、パラコンパクトであることを証明せよ。

問題 64. M をコンパクトな C^∞ 級多様体とし, M を覆う有限個の座標系 $\varphi_1\colon U_1 \to U_1'$, ..., $\varphi_N\colon U_N \to U_N'$ と, 開被覆 $U_1, \ldots, U_N$ に従属した 1 の分割 ρ_1, ..., ρ_N を取る. このとき C^∞ 級写像

$$F(x) = (\rho_1(x), \rho_1(x)\varphi_1(x), \ldots, \rho_N(x), \rho_N(x)\varphi_N(x)) \in \mathbf{R}^{(n+1)N}$$

が M の $\mathbf{R}^{(n+1)N}$ への埋め込みであることを証明せよ.