# 幾何学I演習問題

担当: 中島 啓　TA: 木村嘉之, 森谷駿二, 山川大亮

2007年7月4日 (水)

先週の演習問題の略解は

`http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~nakajima/Lecture/07_Kika1.html`

を参照のこと.

**問題 65.** $M$ は連結で、向きづけ不可能な多様体とする。次の性質をもつ連結多様体 $\widetilde{M}$ と、$C^\infty$ 級写像 $\pi\colon \widetilde{M} \to M$ を構成せよ。

(1) $\widetilde{M}$ は向きづけ可能である。

(2) 各 $x \in M$ について、$\pi^{-1}(x)$ は、ちょうど二点からなる。

(3) $M$ の各点 $x \in M$ に対し、$x$ の連結な近傍 $U$ が存在して、$\pi^{-1}(U)$ は二つの連結成分 $U_+, U_-$ からなり、$\pi$ を $U_+, U_-$ に制限すると、$\pi|_{U_\pm}\colon U_\pm \to U$ は $C^\infty$ 級微分同相になる。

**注**:**問題 12** の写像 $\pi\colon S^2 \to \mathbf{R}P^2$ が、このようなものの例である。

**問題 66.** $\mathbf{C}P^1$ の非同次座標 $\varphi\colon U_0 = \{[z_0 : z_1] \mid z_0 \neq 0\} \to \mathbf{C}$; $[z_0 : z_1] \mapsto z_1/z_0$ を考える。$\mathbf{C}$ 上で $z = x + iy$ と表わしたときに、その上の二次微分形式を

$$\omega = \frac{dx \wedge dy}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

によって定義する。

(1) $\omega$ は、$\mathbf{C}P^1$ 上の二次微分形式に拡張されることを証明せよ。

(2) $\mathbf{C}P^1$ には、非同次座標から向きが入ることをチェックせよ。(**問題 61** の特別な場合) ただし、$\mathbf{C}$ には**問題 61** のように $(x, y)$ によって向きを入れる。

(3) (1) で拡張された $\omega$ に対して

$$\int_{\mathbf{C}P^1} \omega$$

を計算せよ。

**ヒント**: まず、$\int_{\mathbf{C}} \omega$ に等しいことを証明せよ。

**問題 67.** $f(z)$ を正則関数とし、$\omega = f(z)dz = f(z)(dx + idy)$ を複素数に値を取る 1 次微分形式とする。このとき、$d\omega = 0$ を示せ。

**問題 68.** $\mathbf{R}^2$ から原点を除いた領域 $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ で定義された関数 $f(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}$ を考える。

(1) 原点を除いた領域で、$\Delta f = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} f + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} f = 0$ が成り立つことを示せ。

(2) $C_\varepsilon$ を原点を中心とする半径 $\varepsilon$ の円周とする。反時計回りに向きをいれておく。このとき、$\displaystyle\int_{C_\varepsilon} \frac{\partial f}{\partial x} dy - \frac{\partial f}{\partial y} dx$ を計算せよ。

(3) $D$ を原点を含む下の図のような領域とし、その境界を $C$ とし、反時計回りに向きを入れる。このとき、$\displaystyle\int_C \frac{\partial f}{\partial x} dy - \frac{\partial f}{\partial y} dx$ を計算せよ。

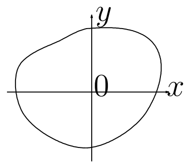


Figure 1: 原点を含む領域

**問題 69. (代数学の基本定理)** $n \geq 1$ とし, $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$ を $n$ 次多項式とし, $f\colon \mathbf{C} \cong \mathbf{R}^2 \to \mathbf{C} \cong \mathbf{R}^2$ という $C^\infty$ 級写像とみなす. $R > 0$ に対して, $D_R = \{z \in \mathbf{C} \mid |c| \leq R\}$ で原点を中心とする半径 $R$ の円周 (の境界と内部) とする. $\omega$ を**問題 53** の $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ 上の 1 次微分形式とする.

(1) 十分大きな $R$ を取ると (特に $f(\partial D_R)$ は原点を通らない),

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_R} f^* \omega = n$$

となることを示せ. **ヒント**: $f_0(z) = z^n$ とし, $f$ と $f_0$ をつなげてみよ.

(2) 上のような大きな $R$ に対して $f(z) = 0$ が, $D_R$ で零点を持たないと仮定するとき, Stokes の定理を用いて

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_R} f^* \omega = 0$$

となることを示し, このようなことがあり得ないことを証明せよ.

**問題 70.** $n$ 次元 $C^\infty$ 級多様体 $M$ の各点における接空間 $T_xM$ に、(正定値な) 内積 $g_x\colon T_xM \times T_xM \to \mathbf{R}$ が定められ、座標ベクトル場 $\partial/\partial x_i$ を代入すると、$g_x((\partial/\partial x_i)_x, (\partial/\partial x_j)_x)$ が $x$ について (局所的な) $C^\infty$ 級関数になる、という意味で $x$ について $C^\infty$ 級に依存しているとする。($M$ 上の**リーマン計量**とよばれる。)

(1) 各点 $x$ ごとに、その近傍 $U$ 上で定義されたベクトル場で $e_1, \ldots, e_n$ であって、各点 $y \in U$ において $e_{1,y}, \ldots, e_{n,y}$ が、$g_y$ に関する $T_yM$ の正規直交基底になっているものが取れることを証明せよ。

(2) 各点 $y$ ごとに $e_{1,y}, \dots, e_{n,y}$ の双対基底 $\theta_{1,y}, \dots, \theta_{n,y}$ を取る。これが正規直交基底になるように $T_y^*M$ に内積を入れる。この内積は、最初の基底 $e_{1,y}, \dots, e_{n,y}$ の取り方には依らず、$g_y$ だけで決まることを示せ。

(3) 同様に、$\bigwedge^k T_y^*M$ に、$\{\theta_{i_1,y} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_k,y} \mid i_1 < \cdots < i_k\}$ が正規直交基底になるように内積を入れる。この内積が、最初の基底 $e_{1,y}, \dots, e_{n,y}$ の取り方には依らず、$g_y$ だけで決まることを示せ。

(4)

$$\omega_y = \theta_{1,y} \wedge \cdots \wedge \theta_{n,y}$$

を考える。$\omega_y$ は、符号を除いて $e_{1,y}, \dots, e_{n,y}$ の取り方には依存しないで決まることを証明せよ。

(5) さらに $M$ は向きづけられているとし、向きに適合した座標系の定める座標ベクトル場が定める $T_yM$ の基底との変換行列の行列式が正になるように $e_{1,y}, \dots, e_{n,y}$ を取ると約束する。すると (2) の符号の不定性が消えて、$\omega_y$ は $g_y$ と向きだけで決まることを示せ。さらに、$M$ 上で $C^\infty$ 級な $n$ 次微分形式を定めることを示せ。(これを向きのついたリーマン多様体の**体積要素**という。)

**問題 71.** (1) 半径 1 の $(n-1)$ 次元球面 $S^{n-1}$ を考える。その接空間 $T_xS^{n-1}$ を $\mathbf{R}^n$ の中の $x$ に直交するベクトルの全体と同一視し、$\mathbf{R}^n$ の自然な内積の制限として内積を定め、リーマン計量とする。このとき $S^{n-1}$ に適当な向きを入れて体積要素 $\omega$ を考える。$\mathbf{R}^n$ の各点 $x$ において、$X_x = x \in \mathbf{R}^n = T_x\mathbf{R}^n$ として、$\mathbf{R}^n$ 上のベクトル場 $X$ を定義する。このとき $\mathbf{R}^n$ 上の $(n-1)$ 次微分形式 $i(X)dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$ を $S^{n-1}$ に、包含写像によって引き戻したものが体積要素になることを示せ。

(2) より一般に、向きのついた境界つき多様体 $M$ を考え、$M$ の各接空間 $T_xM$ には内積がはいっているものとし、境界 $\partial M$ の接空間にはその制限としての内積を入れる。$M$ の体積要素を $\omega_M$、$\partial M$ の体積要素を $\omega_{\partial M}$ で表わす。

$\partial M$ の法ベクトル場 $N$ を $\partial M$ の近傍に拡張したとき、$i(V)\omega_M$ を $\partial M$ に引き戻したものが $\omega_{\partial M}$ になることを示せ。ただし、法ベクトル場は外向きと内向きの二通りがあり、その選び方に応じて $\partial M$ の向きを選ぶ必要があるので、それも指定すること。

**問題 72.** 球面 $S^{n-1}$ の体積を上の問題で定めた体積要素 $\omega_{S^{n-1}}$ を用いて

$$\int_{S^{n-1}} \omega_{S^{n-1}}$$

によって定義し、球 $B^n = \{x \in \mathbf{R}^n \mid |x| \leq 1\}$ の体積を

$$\int_{B^n} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

によって定義する。$S^{n-1}$ の体積を $B^n$ の体積を用いて表わせ。

**問題 73.** Figure 1 のような領域の境界 $C$ に反時計回りの向きを入れ、$\mathbf{R}^2$ の計量の制限として、接空間に内積を入れて体積要素 $\omega_C$ を定める。このとき $\int_C \omega_C$ を $C$ の**長さ**という。もともとの領域が半径 1 の円板を中に含んでいるとき、$C$ の長さが $2\pi$ よりも大きいことを証明せよ。

**問題 74.** **問題 52** のように $\omega_2 = F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy$ を考える。$M$ を $\mathbf{R}^3$ 内のコンパクトな領域で、境界 $\partial M$ は 2 次元の $C^\infty$ 級多様体になっているものを考える。$i\colon \partial M \to \mathbf{R}^3$ を埋め込み写像とする。

(1) $\partial M$ に入る自然な向きと、$\mathbf{R}^3$ の計量からの制限によるリーマン計量によって、体積要素 $\omega_{\partial M}$ を定義する。これを $dA$ で表わす。このとき、$i^*\omega_2 = (F, N)dA$ を示せ。ただし、$N$ は、$\partial M$ の外向き法線ベクトルで、これを $(N_1, N_2, N_3)$ と成分表示したとき、$(F, N) = F_1N_1 + F_2N_2 + F_3N_3$ と定める。

(2) 古典的なダイバージェンス定理

$$\int_M \operatorname{div} F dxdydz = \int_{\partial M} (F, N) dA$$

を、ストークスの定理から導け。

**問題 75. (アルキメデスの原理)** 水に浮かんでいる物体 $D$ を考える. (簡単のため, 平面的に考える.) 下図のように水面が $y = 0$ となるように座標を取る. このとき, $D$ の境界の点 $(x, y)$ において, $D$ は水から深さに比例している浮力を受け, その方向は境界の法線方向である. すなわち,

$$\overrightarrow{F}(x, y) = y\overrightarrow{n}(x, y)$$

を受ける. 但し $\overrightarrow{n}(x, y)$ は, $(x, y)$ における $D$ の境界の外向き法線ベクトルである. このとき, $D$ 全体が水から受ける浮力は $\overrightarrow{F}$ を $D$ の境界のうちの水の下にある部分 $C$ で積分した値

$$\int_C \overrightarrow{F}(x, y) ds$$

に等しい. 但し, $s$ は $C$ の弧長パラメータである. このとき, $D$ 全体で受ける浮力が $y$ 軸の正の方向で, その大きさが, $D$ の水面下にある領域の面積に等しいことを証明せよ.

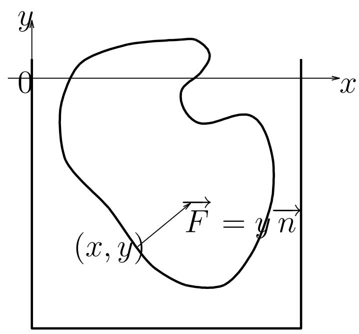


Figure 2: 水に浮かぶ物体