

幾何学 I 演習問題

担当: 中島 啓 TA: 木村嘉之, 森谷駿二, 山川大亮

2007年5月9日(水)

先週の演習問題の略解は

http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~nakajima/Lecture/07_Kika1.html
を参照のこと.

問題 29. (1) $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ を $f(x, y) = xy$ で定義する.

(a) f の微分 (ヤコビ行列) df を計算し, 臨界点の集合 C_f , すなわち $df = 0$ となる点 (x, y) の集合と, 臨界値の集合 $f(C_f)$ を求めよ.

(b) $c \in \mathbf{R}$ に対して $f^{-1}(c)$ は, 多様体になるか?

(2) $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ を $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ と定め, 上と同様の考察を行え.

問題 30. $m \leq n$ のとき, $\mathbf{R}^{m+1} \subset \mathbf{R}^{n+1}$ から誘導される写像 $S^m \rightarrow S^n$ によって, S^m は S^n の部分多様体になることを証明せよ.

問題 31. L は M の部分多様体, M は N の部分多様体であるとする. L は N の部分多様体であることを示せ.

問題 32. $f: M \rightarrow N$ を C^∞ 級多様体のあいだの C^∞ 級写像とする. $\Gamma_f: M \rightarrow M \times N$ を $\Gamma_f(x) = (x, f(x))$ によって定義する. Γ_f によって M は $M \times N$ の部分多様体となることを証明せよ.

問題 33. 問題 25 を多変数に増やす.

$f: \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}^m$ は (全) 微分可能で, \mathbf{C}^n の各変数 z_1, \dots, z_n について正則写像であるとする. このとき, 点 $p \in \mathbf{C}^n$ における複素の意味でのヤコビ行列を

$$\partial f_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial z_n} \end{bmatrix}$$

によって定める.

このとき f を $\mathbf{R}^{2n} \rightarrow \mathbf{R}^{2m}$ という写像と思ってヤコビ行列を df_p とするとき, $2m$ 次の複素正則行列 P と $2n$ 次の複素正則行列 Q をうまく取って

$$P df_p Q^{-1} = \begin{bmatrix} \partial f_p & 0 \\ 0 & \partial f_p \end{bmatrix}$$

と変形せよ. ただし, $\overline{\partial f_p}$ は ∂f_p の各成分の共役複素数をとってできる行列である.

問題 34. $n \geq 1$ とする.

実射影空間 $\mathbf{R}P^n$ の部分集合 $M = \{[x_0 : \cdots : x_n] \in \mathbf{R}P^n \mid x_0^d + \cdots + x_n^d = 0\}$ を考える. ただし, d は奇数とする. M が $\mathbf{R}P^n$ の部分多様体であることを証明せよ. (M が空集合でないことも注意すること.)

(2) 複素射影空間 CP^n 内の部分集合 $M = \{[z_0 : \cdots : z_n] \in CP^n \mid z_0^d + \cdots + z_n^d = 0\}$ について同様のことを示せ. 今度は, d は 1 以上の整数とする.

ヒント: 上の問題 33 を使え.

問題 35. (2003 年度幾何学 I 試験問題) n 次元射影空間 $\mathbf{R}P^n$ と $(n+1)$ 次元ユークリッド空間 \mathbf{R}^{n+1} の直積の部分集合

$$M = \{([x_0 : x_1 : \cdots : x_n], (y_0, \dots, y_n)) \in \mathbf{R}P^n \times \mathbf{R}^{n+1} \mid x_i y_j = x_j y_i \quad (i, j = 0, \dots, n)\}$$

を考える.

(1) M が $\mathbf{R}P^n \times \mathbf{R}^{n+1}$ の部分多様体であることを証明せよ. 何次元か?

(2) M から第二成分への射影を $f: M \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ とする. f の臨界点をすべて求めよ.