

幾何学 I 演習問題

担当: 中島 啓 TA: 木村嘉之, 森谷駿二, 山川大亮

2007年6月13日(水)

先週の演習問題の略解は

http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~nakajima/Lecture/07_Kika1.html
を参照のこと。

問題 47. $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$ とし, x_1 を S^n 上の関数と考え, $\alpha = dx_1$ とおく。 α は, S^n 上の 1 次微分形式である。問題 2 の座標

$$\varphi^\pm(x_1, \dots, x_{n+1}) = (y_1, \dots, y_n) = \left(\frac{x_1}{1 \mp x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 \mp x_{n+1}} \right)$$

を用いて, α を dy_i の一次結合として表わせ。

問題 48. (1) $S^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ とし, $\pi: \mathbf{R} \rightarrow S^1$ を自然な射影とする。 x を \mathbf{R} 上の自然な座標とし, dx を対応する 1 次微分形式とする。 S^1 上の 1 次微分形式 α で, $\pi^*\alpha = dx$ となるものがただ一つ存在することを証明せよ。以下、簡単のためこれも dx で表わす。

(2) p を S^1 の点とする。 $(dx)_p$ はすべての p に対し 0 でないことを示せ。

(3) S^1 上の C^∞ 級関数 $f: S^1 \rightarrow \mathbf{R}$ で, $df = dx$ となるものが存在しないことを証明せよ。

問題 49. M を C^∞ 級微分可能多様体とする。 α は, ベクトル場 X に対して C^∞ 級関数を対応させる写像で, $C^\infty(M)$ -線形であるとする。すなわち $\alpha(fX + gY) = f\alpha(X) + g\alpha(Y)$ が, ベクトル場 X, Y, C^∞ 級関数 f, g について成立するとする。

(1) 点 $p \in M$ を取る。 p の近傍 W 上で 0 となるベクトル場 X に対して

$$\alpha(X)(p) = 0$$

となることを示せ。

(2) さらに, α は, C^∞ 級 1 次微分形式であって, したがって $\alpha_p: T_pM \rightarrow \mathbf{R}$ が各点 $p \in M$ ごとに定まり,

$$(\alpha(X))(p) = \alpha_p(X_p)$$

となることを証明せよ。

問題 50. (1) 1 次微分形式 α とベクトル場 X, Y に対して,

$$(L_X\alpha)(Y) = X(\alpha(Y)) - \alpha([X, Y])$$

とおく。問 47 を用いて $L_X\alpha$ が 1 次微分形式であることを証明せよ。

(2) ベクトル場 X に対応する 1 パラメータ局所変換群を φ_t とする。このとき、1 次微分形式 α について

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\varphi_t^*\alpha)_p - \alpha_p}{t} = (L_X\alpha)_p$$

を証明せよ。

ただし、授業でやった [松本, 補題 17.a] は使ってよい。

問題 51. (1) \mathbf{R}^2 内の開集合 U 上の 1 次微分形式 $\alpha = f dx + g dy$ を考える。このとき U 上の C^∞ 級関数 $\Phi: U \rightarrow \mathbf{R}$ があって、 $d\Phi = \alpha$ となっていたとする。 U 内の二点 P, Q を向きのついた曲線 $c: [a, b] \rightarrow U$ で、 $c(0) = P, c(1) = Q$ と結ぶ。このとき

$$\int_c \alpha$$

は、 $\Phi(Q) - \Phi(P)$ となることを示せ。特に、 c の取り方には依らず、 P, Q だけで決まることになる。

(2) 逆に、上の積分が端点 P, Q で定まり、 P, Q を結ぶ直線の取り方にはよらないとする。このとき $d\Phi = \alpha$ となる U 上の C^∞ 級関数 $\Phi: U \rightarrow \mathbf{R}$ が存在することを証明せよ。