幾何学I小テスト

担当: 中島 啓　TA: 木村嘉之, 森谷駿二, 山川大亮

2007年6月6日(水)

問題 1. V を $\mathbf{R}$ 上の有限次元ベクトル空間とする。V の双対空間 V^* を V から $\mathbf{R}$ への線型写像の全体のなす空間 $\mathrm{Hom}(V, \mathbf{R})$ と定める。

(1) V^* は線型空間であることを示せ。ただし、$a, b \in \mathbf{R}$, $f, g \in V^*$ に対して $af + bg \in V^*$ を $(af + bg)(v) = af(v) + bg(v)$ で定義する。

(2) $e_1, \dots, e_n$ を V の基底とするとき、$\theta_i \in V^*$ を $\theta_i(\sum_j x_j e_j) = x_i$ によって定義する。$\theta_1, \dots, \theta_n$ は V^* の基底であることを示せ。($e_1, \dots, e_n$ の**双対基底**という。)

(3) V, W を共に $\mathbf{R}$ 上の有限次元ベクトル空間とし、$\Phi\colon V \to W$ を線型写像とする。このとき $\Phi^*\colon W^* \to V^*$ を

$$\Phi^*(f)(v) = f(\Phi(v)), \qquad f \in W^* = \mathrm{Hom}(W, \mathbf{R}), \quad v \in V$$

によって定義する。Φ^* が線型写像であることを証明せよ。

(4) $\Psi\colon V \to (V^*)^*$ を $v \mapsto \{V^* \ni f \mapsto f(v) \in \mathbf{R}\}$ によって定める。Ψ が線型空間の同型写像であることを証明せよ。

(5) $e'_1, \dots, e'_n$ を V の別の基底とする。$e'_i = \sum_j a_{ij} e_j$ によって、基底の変換行列 $A = (a_{ij})$ を定める。$e'_1, \dots, e'_n$ の双対基底を $\theta'_1, \dots, \theta'_n$ とするとき、$\theta_1, \dots, \theta_n$ と $\theta'_1, \dots, \theta'_n$ の間の基底の変換行列を A を用いて表せ。

問題 2. V を $\mathbf{R}$ 上の有限次元ベクトル空間とする。$\overbrace{V \times \cdots \times V}^{k\text{ 個}}$ から $\mathbf{R}$ への写像 α で、次の二つの性質を持つものの全体を $\bigwedge^k V^*$ で表す。

多重線型性 各成分について線型写像である。すなわち

$$\alpha(v_1, \dots, av_i + bv'_i, \dots, v_k) = a\alpha(v_1, \dots, v_i, \dots, v_k) + b\alpha(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_k)$$

が成り立つ。

交代性 σ を $\{1, \dots, k\}$ の置換とするとき、

$$\alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) = \varepsilon(\sigma)\, \alpha(v_1, \dots, v_k)$$

が成り立つ。ここで $\varepsilon(\sigma)$ は σ の符号である。

$k = 1$ の場合は、$\bigwedge^1 V^*$ は上の問の V^* に他ならない。また、$k = 0$ のときは、$\bigwedge^0 V^* = \mathbf{R}$ と理解する。

(1) $\bigwedge^k V^*$ は線形空間であることを示せ。

(2) $\alpha \in \bigwedge^k V^*$, $\beta \in \bigwedge^l V^*$ とするとき α と β の外積 $\alpha \wedge \beta \in \bigwedge^{k+l} V^*$ を

$$(\alpha \wedge \beta)(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma)\, \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \beta(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)})$$

によって定義する。ただし、σ は $\{1, \dots, k+l\}$ の置換をすべて動かして和を取るものとする。$\alpha \wedge \beta$ が確かに $\bigwedge^{k+l} V^*$ に入っていることを証明せよ。

(3) 上の $\wedge$ について以下の性質を証明せよ。

$$(a\alpha + b\alpha') \wedge \beta = a\alpha \wedge \beta + b\alpha' \wedge \beta \tag{0.1}$$

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{kl} \beta \wedge \alpha \tag{0.2}$$

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \tag{0.3}$$

三番目の式から三つの元の外積を $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$ と書いて問題がない。

(4) $\theta_1, \dots, \theta_k \in V^* = \bigwedge^1 V^*$ とするとき、上の定義に基づいて

$$(\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_k)(v_1, \cdots, v_k) = \det \begin{pmatrix} \theta_1(v_1) & \dots & \theta_1(v_k) \\ \vdots & & \vdots \\ \theta_k(v_1) & \dots & \theta_k(v_k) \end{pmatrix}$$

を証明せよ。

(5) $e_1, \dots, e_n$ を V の基底とし、$\theta_1, \dots, \theta_n$ をその V^* の双対基底とする。このとき $\{1, \dots, n\}$ の、k 個の元からなる部分集合 $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ $(i_1 < i_2 < \cdots < i_k)$ に対して

$$\theta_I = \theta_{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_n}$$

と定義する。このとき $\{\theta_I \mid I \subset \{1, \dots, n\}, \#I = k\}$ は、$\bigwedge^k V^*$ の基底になることを証明せよ。

(6) $e'_1, \dots, e'_n$ を V の別の基底とする。$e'_i = \sum_j a_{ij} e_j$ によって、基底の変換行列 $A = (a_{ij})$ を定める。$e'_1, \dots, e'_n$ の双対基底を $\theta'_1, \dots, \theta'_n$ とする。θ'_I を上と同様に定める。$\{\theta_I \mid I \subset \{1, \dots, n\}, \#I = k\}$ と $\{\theta'_I \mid I \subset \{1, \dots, n\}, \#I = k\}$ の間の基底の変換行列が、A の転置行列の小行列式で与えられることを証明せよ。