

## 幾何学I テスト (7/25) 略解

略解 1.  $v = e_1$  となるような  $V^*$  の基底  $e_1, e_2, \dots, e_n$  ( $n = \dim V$ ) を取る。このとき  $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \mid i_1 < \dots < i_k\}$  は、 $\wedge^k V^*$  の基底となる。すると

$$v \wedge e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{k+1}} = e_1 \wedge e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{k+1}} = \begin{cases} 0 & i_1 = 1 \text{ のとき} \\ e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge \dots \wedge e_{j_{k+2}} & i_1 \neq 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

となる。ただし、下の場合は  $j_1 = 1, j_2 = i_1, \dots, j_{k+2} = i_{k+1}$  である。下の場合は基底のベクトルになっており、また、 $i_1, \dots, i_{k+1}$  が異なれば、 $j_1, \dots, j_{k+2}$  も異なる。したがって  $\text{Ker } f_{k+1}$  は  $\{e_1 \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \mid 1 < i_2 < \dots < i_k\}$  を基底に持つ。

$f_k$  についても基底のうつる先を考えて、同様に  $\text{Im } f_k$  は、 $\{e_1 \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_k} \mid 1 < i_2 < \dots < i_k\}$  を基底に持つ。したがって  $\text{Im } f_k = \text{Ker } f_{k+1}$  が成り立つ。

略解 2.  $C^\infty$  級写像

$$F: M(n, n; \mathbf{R}) \ni g \mapsto (g^t g \text{ の対角線より上の成分}) \in \mathbf{R}^{n(n+1)/2}$$

を考える。 $g^t g$  が対称行列であることに注意し、上の  $\mathbf{R}^{n(n+1)/2}$  は対称行列の全体のなす空間と見なすことにする。すると、 $O(n) = F^{-1}(I_n)$  である。

$F$  の微分を計算する。 $g$  において  $X$  方向に微分すると

$$DF_g(X) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} F(g + tX) = X^t g + g^t X$$

となる。

対称行列の全体に内積を  $(Y, Z) = \text{tr}(YZ)$  で入れる。これは正定値な内積であることは容易にチェックできる。今、 $g \in O(n)$  とし、上の  $DF_g$  の像と対称行列  $Y$  が直交しているとする。すなわち

$$\begin{aligned} 0 &= \text{tr}((X^t g + g^t X)Y) = \text{tr}(X^t g Y) + \text{tr}(g^t X Y) = \text{tr}(X^t g Y) + \text{tr}(Y X^t g) \\ &= 2 \text{tr}(X^t g Y) \end{aligned}$$

がすべての  $X$  について成り立つ。このときすぐに分かるように  $g^t Y = 0$  となる。 $g$  は可逆であるから、 $Y = 0$  となる。したがって  $DF_g$  は全射であり、 $F^{-1}(I_n)$  は部分多様体となる。

上の計算により  $T_{I_n} O(n) = \text{Ker } DF_{I_n} = \{X \mid X + {}^t X = 0\}$  である。これは交代行列の全体である。

略解 3. 写像  $f$  の第一成分を  $f_1$  とする。 $M$  はコンパクトであるから、 $f_1$  は最大値を持ち、その点で  $d(f_1)_x = 0$  となる。すると  $df_x: T_x M \rightarrow \mathbf{R}^n$  の第一成分は必ず 0 であり、すなわち像が  $\mathbf{R}^{n-1}$  に含まれていることを意味する。したがって、 $x$  で  $df_x$  は同型となり得ない。

略解 4. 演習問題 66

略解 5. 演習問題 68