**略解 1.** $U_i^\pm = \{(x_1,\dots,x_{n+1}) \in S^n \mid \pm x_i > 0\}$ $(i=1,\dots,n+1)$ とおく．(複号同順) $U_i^\pm$ は $S^n$ の開集合であり，$S^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i^+ \cup U_i^-$ と覆っている．$\varphi_i^\pm \colon U_i^\pm \to B_1$ を

$$\varphi_i^\pm(x_1,\dots,x_{n+1}) = (x_1,\dots,x_{i-1},\widehat{x_i},x_{i+1},\dots,x_{n+1}) \qquad (x_i \text{ は除く})$$

で定義する．ただし $B_1$ は $\mathbf{R}^n$ の半径 1 の球 (の内部) である．$\varphi_i^\pm$ の逆写像 $(\varphi_i^\pm)^{-1}$ は

$$(\varphi_i^\pm)^{-1}(y_1,\dots,y_n) = (y_1,\dots,y_{i-1},\pm\sqrt{1-\sum_{\alpha=1}^n y_\alpha^2},y_i,\dots,y_n)$$

で与えられる． これらはともに連続であり，したがって $\varphi_i^\pm$ は同相写像である． さらに $U_i^\pm \cap U_j^\pm$ $(i \neq j)$ を考える．(複号同順とは限らない.) このとき $\varphi_i^\pm \circ (\varphi_j^\pm)^{-1}$ は

$$(y_1,\dots,y_n) \longmapsto (y_1,\dots,y_{i-1},\pm\sqrt{1-\sum_{\alpha=1}^n y_\alpha^2},y_i,\dots,\widehat{y_j},\dots,y_n)$$

で与えられ，微分可能である．逆写像は $i$ と $j$ を入れ替えたもので，やはり微分可能である．したがって，$\varphi_i^\pm$ で $S^n$ の座標系が定まった．

**略解 2.** $\varphi^\pm$ の逆写像は

$$(\varphi^\pm)^{-1}(y_1,\dots,y_n) = (\frac{2y_1}{\sum y_\alpha^2+1},\dots,\frac{2y_n}{\sum y_\alpha^2+1},\pm\frac{\sum y_\alpha^2-1}{\sum y_\alpha^2+1})$$

である．したがって

$$\varphi^+ \circ (\varphi^-)^{-1}(y_1,\dots,y_n) = (\frac{y_1}{\sum y_\alpha^2},\dots,\frac{y_n}{\sum y_\alpha^2})$$

である．$(y_1,\dots,y_n) = (0,\dots,0)$ は座標の定義される開集合の共通部分 (を $\varphi^-$ でうつしたもの) からのぞかれているので，これは微分可能である．逆も同様に微分可能である．

**略解 3.** クラインの壺がハウスドルフな位相空間を定めることの証明は略す．$[0,1]\times[0,1]$ における同値関係 $(x+1,y) \sim (x,y), (x,y) \sim (1-x,y+1)$ を $\mathbf{R}^2$ への同値関係に拡張して考える．$\pi\colon \mathbf{R}^2 \to M$ を商写像とする．$\mathbf{R}^2$ における開集合 $U_i$ $(i=1,2,3,4)$ を以下で定める．

$$\begin{aligned}
U_1 &= (-1/3,2/3)\times(-1/3,2/3)\\
U_2 &= (-1/3,2/3)\times(1/3,4/3)\\
U_3 &= (1/3,4/3)\times(-1/3,2/3)\\
U_4 &= (1/3,4/3)\times(1/3,4/3)
\end{aligned}$$

このとき $\pi$ の $U_i$ への制限は像への同相写像を定める．また，$M = \bigcup_{1\le i\le 4}\pi(U_i)$ と開被覆をなす．このとき $\pi(U_i)\cap\pi(U_j)$ $(i<j)$ 上で座標変換が滑らかであることは，同値関係の定義から従う．

**略解 4.** $\mathbf{C}^{n+1}\setminus\{0\}$ の同値関係 $(z_0,z_1,\cdots,z_n)\sim(z'_0,z'_1,\cdots,z'_n)$ を, ある $\lambda\in\mathbf{C}^*$ が存在して, $(z'_0,\cdots,z'_n)=(\lambda z_0,\cdots,\lambda z_n)$ を満たすということで定める．このとき同値関係から得られる商集合と直線全体のなす集合 $\mathbf{C}P^n$ とは $(z_0,\cdots,z_n)$ の張る複素直線を対応させることにより同一視することができる．以下では, $\mathbf{C}P^n$ には, $\mathbf{C}^{n+1}\setminus\{0\}$ の位相と上の同値関係から定まる商位相を考える．($\mathbf{C}^{n+1}\setminus\{0\}$ には, $\mathbf{C}^{n+1}$ に, 標準的な Hermite 内積を一つとって距離空間 (特にハウスドルフな位相空間) としておく．)

このとき直線 (と Hermite 内積に関するその直交補空間) に対して, その直交射影を対応させることにより, $\mathbf{C}P^n$ から $\{A\in M_n(\mathbf{C})|A^*=A,A^2=A,\mathrm{rank}(A)=1)\}$ への連続な全単射が存在する．ここで, $M_n(\mathbf{C})$ は $n\times n$ 行列全体のなすベクトル空間であり, $A^*$ は, $A$ の Hermite 共役 $(A^*)_{ij}=\overline{a_{ji}}$ を表わす．$\{A\in M_n(\mathbf{C}|A^*=A,A^2=A,\mathrm{rank}(A)=1)\}$ には, 行列のなすベクトル空間としての距離空間の誘導位相をとっておく．とくにハウスドルフ空間である．このとき, $\mathbf{C}P^n$ がコンパクトな位相空間であることに注意すれば, 上の連続全単射は, 同相写像であり, $\mathbf{C}P^n$ は, ハウスドルフな位相空間を定めることが分かる．

次に $\mathbf{C}P^n$ に $C^\infty$ 級の多様体の構造が定まることを示す．$(z_0,\cdots,z_n)\in\mathbf{C}^{n+1}\setminus\{0\}$ を含む商集合の元を, $[z_0\colon\cdots\colon z_n]$ で表わす. $U_i$ を以下で定める．

$$U_i=\{[z_0\colon\cdots\colon z_n]\in\mathbf{C}P^n|z_i\neq 0\}$$

写像 $\varphi_i\colon U_i\to\mathbf{C}^n$ を

$$[z_0\colon\cdots\colon z_i\colon\cdots\colon z_n]\mapsto\left(z_0/z_i,\cdots,\widehat{z_i/z_i},\cdots,z_n/z_i\right)$$

で定義する．ここで, $\widehat{z_i/z_i}$ はその成分を取り除くことを表わしている．この写像は商位相の定義から, 連続な全単射であり, またその逆写像 $\psi_i\colon\mathbf{C}^n\to U_i$ は,

$$\psi_i\colon(w_1,w_2,\cdots,w_n)\mapsto[w_0\colon\cdots\colon w_{i-1}\colon 1\colon w_i\colon\cdots\colon w_n]$$

(右辺は $i$ 番目に $1$ を入れる) であり, これは定義から連続である．次に $U_i\cap U_j$ $(i<j)$ において,

$$\varphi_j\circ(\varphi_i)^{-1}(w_1,\cdots,w_n)=(w_1/w_j,\cdots,w_{i-1}/w_j,1/w_j,w_i/w_j,\cdots,\widehat{w_j/w_j},w_n/w_j)$$

このとき $\mathbf{C}\simeq\mathbf{R}^2$ を $z=x+\sqrt{-1}y\mapsto(x,y)$ で同一視すれば, 上の写像が微分可能であることが確かめられる．よって, $\mathbf{C}P^n$ が $C^\infty$ 級微分可能多様体であることがわかった.

**略解 5.** (1) $\mathbf{R}$ には通常の距離から定まる位相を入れているのでハウスドルフ空間である. また, 明らかに $\varphi$ は同相写像である．($\mathbf{R}$ から $\mathbf{R}$ への全単射連続写像はすべて同相写像である．) $\varphi\circ\varphi^{-1}=id$ が $\mathbf{R}$ から $\mathbf{R}$ への $C^\infty$ 級写像で $C^\infty$ 級の逆写像を持つことも明らか. よって $\mathbf{R}$ は $C^\infty$ 級多様体である.

(2) $\{(\mathbf{R},\varphi),(\mathbf{R},\psi)\}$ が座標近傍系になり得ない事を言えばよい．$\{(\mathbf{R},\varphi),(\mathbf{R},\psi)\}$ が座標近傍系であると仮定する．$f:=\varphi\circ\psi^{-1}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ は $C^\infty$ 級の逆写像 $g$ を持つ．$g\circ f(x)=x$ である．両辺を微分すると, $\frac{dg}{dy}(f(x))\frac{df}{dx}(x)=1$ となる．しかし, $x=0$ を代入すると, 左辺 $=0$ となるから矛盾である.

**略解 6.** (1) $p_0 = \pi(0,0),\ p_1 = \pi(0,1)$ とおく. 同値関係の定義から $p_0 \neq p_1$ である. $V_i$ $(i = 0,1)$ を $p_i$ を含む $M$ の開集合とすると, 商位相の定義から $\pi^{-1}(V_i)$ は $\mathbf{R} \times \{0,1\}$ の開集合であり, また $(0,i)$ を含むので, 十分小さい正の数 $\epsilon$ が存在して

$$(-\epsilon, \epsilon) \times \{i\} \subset \pi^{-1}(V_i),$$

故に

$$\pi\left((-\epsilon, \epsilon) \times \{i\}\right) \subset V_i$$

となる. 今この式の左辺を $W_i$ とおくと, 同値関係の定義から

$$W_0 \cap W_1 \supset \pi\left((-\epsilon, 0) \times \{0,1\}\right) \neq \emptyset$$

である. これから $V_0 \cap V_1 \neq \emptyset$ が従う. $V_i$ の取り方は任意であったから, $M$ は $p_0, p_1$ でハウスドルフ公理を満たさない事が示された.

(2) 同値関係の定義から $(x,s) \sim (y,t)$ ならば $x = y$ であり, これは写像 $\varphi : M \to \mathbf{R}$ を $\pi(x,t) \mapsto x$ として定義できる（つまり well-defined である）事を意味する. $\varphi_i$ $(i = 0,1)$ は $\varphi$ を $U_i$ に制限した写像であるから, 特にこれらは well-defined である. また合成 $\varphi \circ \pi : \mathbf{R} \times \{0,1\} \to \mathbf{R}$ は $\mathbf{R}$ への自然な射影に他ならないから特に連続であり, 故に商位相の定義から $\varphi$ 自身も連続である. 従って制限写像 $\varphi_i$ も連続となる. 一方写像 $\psi_i : \mathbf{R} \to U_i$ を $x \mapsto \pi(x,i)$ で定義すると, これは明らかに連続であり, また $\varphi_i$ の逆写像である事も容易に分かる. 故に $\varphi_i$ は同相写像である.

(3) $\varphi_0(U_0 \cap U_1) = \varphi_1(U_0 \cap U_1) = (-\infty, 0)$ であり, $\varphi_0 \circ \varphi_1^{-1} : (-\infty,0) \to (-\infty,0)$ は恒等写像に他ならない. 特にこれは $C^\infty$ 級写像である.