略解 8. S^n の座標系に関して先週の略解の記号を用いる．i の座標表示 $i \circ (\varphi^{\pm})^{-1} \colon B_1 \to \mathbf{R}^{n+1}$ は

$$(y_1, \ldots, y_n) \mapsto (y_1, \ldots, y_{i-1}, \pm\sqrt{1 - \sum_{\alpha=1}^{n} y_\alpha^2}, y_i, \ldots, y_n)$$

で与えられる．従って主張を示すには関数 $f_i(y_1, \ldots, y_n) := \sqrt{1 - \sum_{\alpha=1}^{n} y_\alpha^2}$ が B_1 上で C^∞ 級である事を示せば十分である．これは B_1 上 $\sum_{\alpha=1}^{n} y_\alpha^2 < 1$ である事から明らか.

略解 9. 先週の略解より

$$\varphi^+ \circ (\varphi^-)^{-1}(y_1, y_2) = (\frac{y_1}{y_1^2 + y_2^2}, \frac{y_2}{y_1^2 + y_2^2})$$

である．一方 $\psi^+ \circ (\psi^-)^{-1}(w) = \frac{1}{w}$ であるから, $w = y_1 + iy_2$ として $\psi^+ \circ (\psi^-)^{-1}(y_1 + iy_2)$ の実部と虚部は,

$$\frac{y_1}{y_1^2 + y_2^2}, \quad -\frac{y_2}{y_1^2 + y_2^2}$$

となっている．すなわち, 上の $\varphi^+ \circ (\varphi^-)^{-1}(y_1, y_2)$ の第二成分を -1 倍したものである．これは $F \colon S^2 \to \mathbf{C}P^1$ を

$$\begin{tikzcd}
 & S^2 \setminus \{(0,0,1)\} \arrow[r, "\varphi^+"] \arrow[dl, hook] & \mathbf{C} \arrow[r, "\text{恒等写像}"] & \mathbf{C} \arrow[r, "(\psi^+)^{-1}"] & U_0 \arrow[dr, hook] & \\
S^2 & & & & & \mathbf{C}P^1 \\
 & S^2 \setminus \{(0,0,-1)\} \arrow[r, "\varphi^-"] \arrow[ul, hook] & \mathbf{C} \arrow[r, "\text{共役複素数}", "\text{を取る}"'] & \mathbf{C} \arrow[r, "(\psi^-)^{-1}"] & U_1 \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

で定義できることを意味する．つまり共通部分 $(S^2 \setminus \{(0,0,1)\}) \cap (S^2 \setminus \{(0,0,-1)\})$ で同じ行き先を定めている．定め方から, F もその逆 F^{-1} も微分可能であり, F は微分同相写像である.

略解 10. 前問と同じ記号を用いる．$a_n \neq 0$ と仮定して良い．写像 $\tilde{f} \colon \mathbf{C}P^1 \to \mathbf{C}P^1$ を

$$\tilde{f}([z_0 : z_1]) = \left[z_0^n : \sum_{i=0}^{n} a_i z_1^i z_0^{n-i} \right]$$

と定める（$a_n \neq 0$ より左辺の 2 つの成分が両方 0 になる事はない）と, $\tilde{f}(U_0) \subset U_0$ であり, 更に

$$\psi^+ \circ \tilde{f} \circ (\psi^+)^{-1}(z) = \psi^+ \circ \tilde{f}([1 : z]) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i = f(z)$$

となる．これは $\tilde{f}$ が f の拡張を与えている事を意味する．また上の式は $\tilde{f}$ が U_0 上の各点において C^∞ 級である事も示している．最後に $\tilde{f}$ が点 $[0 : 1]$ において C^∞ 級である事を示す.

まず $\tilde{f}([0:1]) = [0:1]$ である事に注意する．点 $[0:1]$ の近傍として $U_1 \cap \tilde{f}^{-1}(U_1)$ を取る．この上で $\tilde{f}$ の座標表示は

$$\psi^- \circ \tilde{f} \circ (\psi^-)^{-1}(w) = \psi^- \circ \tilde{f}([w:1]) = \frac{w^n}{\sum_{i=0}^n a_i w^{n-i}}$$

となり, これが C^∞ 級である事は最右辺の分母が $(\psi^-)^{-1}(U_1 \cap \tilde{f}^{-1}(U_1))$ 上決して 0 にならない事から明らかである．

略解 11. M の座標系は

$$\varphi\colon M \to \mathbf{R}, \quad \varphi(x) = x^3$$

で与えられていた．従って F の座標表示は $F \circ \varphi^{-1}(x) = F(x^{1/3}) = x$ となり, これは微分同相である．

略解 12. $S^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ とすると, $\pi(x_0, \dots, x_n) = [x_0 : \dots : x_n]$ である．**問題 1** のように S^n に座標 $\varphi_i^\pm$ を入れ, また $\mathbf{R}P^n$ に非同次座標 ψ_i (すなわち $\psi_i([x_0 : \dots : x_n]) = (x_0/x_i, \dots, \widehat{x_i/x_i}, \dots, x_n/x_i)$ を入れると

$$\psi \circ \pi \circ (\varphi_i^\pm)^{-1}(y_1, \dots, y_n) = \pm(\frac{y_1}{\sqrt{1 - \sum_{\alpha=1}^n y_\alpha^2}}, \dots, \frac{y_n}{\sqrt{1 - \sum_{\alpha=1}^n y_\alpha^2}})$$

となる．これは C^∞ 級写像である．$\mathbf{C}P^n$ についても同様.

略解 13. $(x, y) \sim (x', y') \iff (x - x', y - y') \in \mathbf{Z}^2$ として, $T^2 = \mathbf{R}^2/\sim$ である．$(x, y) \sim (x', y')$ のとき $(2x, 2y) \sim (2x', 2y')$ であるから well-defined である．f が C^∞ 級であることは, 積多様体の定義から, $g\colon T^2 \to S^1$ $(g(x) = 2x)$ と $g'\colon T^2 \to S^1$ $(g'(x) = 2y)$ が C^∞ 級であることをいえばよいことが分かる．どちらの写像も $h\colon S^1 \to S^1$ $(h(x) = 2x)$ と射影 $T^2 = S^1 \times S^1 \to S^1$ (第一成分もしくは第二成分への射影) の合成で表わされるから, 結局 S^1 の場合の対応する主張「$h\colon S^1 \to S^1$, $h(x) = 2x$ は C^∞ 級である」から従うことが分かる.

このとき, 値域の方では授業でやったように座標を取り, 定義域の方ではさらに半分に細かく切った座標を取ってチェックすればよい. (定義域と値域を同じ座標で取るのは無理であることに注意.)

また, $f(0,0) = (0,0) = f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ であるから, f は単射でなく, 逆写像は持たない.