幾何学IIテスト問題解説

担当: 中島 啓

実施日: 2009年2月4日 (水) 10:30　13:30 (180分)

答案を数学教室事務室で返却するので受け取ること。(4月一杯で処分する。)

解答 1. 略

解答 2. (1) **演習問題 42**(1) を参照.

(2) **演習問題 42**(2) を参照.

(3) $M = T^2 \setminus \{p\}$, U を p の回りの円盤と微分同相な開近傍として、マイアー・ビートリス完全系列を用いると、

$$\begin{tikzcd}
H^{k+1}(T^2) \arrow[r, "\alpha^*"] & H^{k+1}(M) \oplus H^{k+1}(U) \arrow[r, "\beta^*"] & H^{k+1}(U \cap M) \\
H^{k}(T^2) \arrow[r, "\alpha^*"] & H^{k}(M) \oplus H^{k}(U) \arrow[r, "\beta^*"'] & H^{k}(U \cap M) \arrow[llu, "d^*"] \\
H^{k-1}(T^2) \arrow[r, "\alpha^*"] & H^{k-1}(M) \oplus H^{k-1}(U) \arrow[r, "\beta^*"'] & H^{k-1}(U \cap M) \arrow[llu, "d^*"]
\end{tikzcd}$$

を得る。ここで、U は一点、$U \cap M$ は S^1 とホモトピックであることに気をつけると、$H^k(M) = 0$ $(k \geq 3)$ はすぐに分かる。

次に M は連結であるから、$H^0(M) = \mathbf{R}$ も分かる。すると $H^0(M) \oplus H^0(U) \xrightarrow{\beta^*} H^0(U \cap M)$ が全射であることが分かる。(完全系列を用いてもいいし、$H^0(\bullet)$ が局所定数関数で表されることを用いてもよい。) よって、完全列は

$$0 \to H^1(T^2) \to H^1(M) \to H^1(U \cap M) \xrightarrow{d^*} H^2(T^2) \to H^2(M) \to 0$$

となっているところまで、分かった。

次に、d^* を計算する。$H^1(U \cap M) \cong H^1(S^1)$ は p の回りを (U の中で) 一周回る円周に沿って積分すると 1 になる $U \cap M$ 上の閉微分形式 φ で代表される。U と M に付随する T^2 に関する 1 の分割 ρ_U, ρ_M を取ると、$d^*[\varphi]$ は

$$\psi = \begin{cases} -d(\rho_M \varphi) & U \text{ 上} \\ d(\rho_U \varphi) & M \text{ 上} \end{cases}$$

となる微分形式 ψ で代表されていた。これは、$U \cap M$ 上に台を持つ微分形式であることに注意しておく。

また $H^2(T^2) \cong \mathbf{R}$ は T^2 上積分することで与えられていた。そこで $\int_{T^2} \psi = \int_{U \cap M} d(\rho_U \varphi)$ を計算する。$U \cap M$ は円盤から一点を除いたものと微分同相で、一点の回りの小さい円 C_1 と、円盤の境界の近くの円 C_2 で囲まれた領域 D を、ψ の台が D に入るように取る。ρ_U は C_2 では 0、C_1 で 1 となるとしてよい。すると、上の積分は D 上での積分に等しく、ストークスの定理より

$$\int_D d(\rho_U \varphi) = (-\int_{C_1} + \int_{C_2})(\rho_U \varphi) = -\int_{C_1} \varphi = -1$$

である。よって、d^* は同型である。これから

$$H^2(M) = 0, \qquad H^1(M) \cong H^1(T^2) = \mathbf{R}^2$$

が従う。

(4) $P^n(\mathbf{C})$ の CW 複体としての構造を $P^n(\mathbf{C}) = e^0 \cup e^2 \cup \cdots e^{2n}$ と入れる。$P^m(\mathbf{C}) = e^0 \cup e^2 \cup \cdots e^{2m}$ であり、よって $X = e^0 \cup e^{2m+2} \cup e^{2m+4} \cup \cdots e^{2n}$ が X の CW 複体としての構造になる。したがって

$$H_k(X; \mathbf{Z}) = \begin{cases} \mathbf{Z} & k = 0, 2m+2, 2m+4, \ldots, 2n \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他の場合} \end{cases}$$

となる。

解答 3. 基本的に**演習問題 11** と同じである。

講評

- d^* の定義が書けていれば 10 点、その他の部分が 10 点。
- **問題 2**(1) 立方体の辺を 合わせたもの、ということを取り違えているものがあった。ここでは、「合わせる」は和集合の意味である。これについては、辺の向きが指定されていないことから、「貼り合わせる」の意味に取りようがないこと、辺を一点に潰してできる商空間を、「合わせる」とはいわないことから、すべて 0 点とした。
- **問題 2**(3) は、T^2 のコホモロジーを求めた**演習問題 14** において D_1, D_2 を貼る代わりに、D_1 だけを貼ったものと考えても計算できる。