幾何学II演習問題

担当: 中島 啓

2008年10月1日(水)

今回は, 微分形式, Stokesの定理についての復習を行う.

問題 1. 3次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^3$ 上の, 三つの C^∞ 級関数の組 $F = (F_1, F_2, F_3)$ に対して,

$$\omega_1 \stackrel{\text{def.}}{=} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz, \qquad \omega_2 \stackrel{\text{def.}}{=} F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy$$

と定義する. $d\omega_1$, $d\omega_2$ を計算し, 電磁気学における $\operatorname{div} F = \nabla \cdot F$, $\operatorname{curl} F = \nabla \times F$ $(\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z))$ が, 現れることをチェックせよ.

時間があれば, 古典的な湧き出し量定理

$$\int_M \operatorname{div} F dxdydz = \int_{\partial M} (F, \vec{n}) d\sigma$$

が, Stokesの定理の特別な場合であることを確かめよ. ただし, M は, $\mathbf{R}^3$ 内の滑らかな境界 ∂M を持つ領域であり, $\vec{n}$ は単位法線ベクトル, $d\sigma$ は面積要素であり, 境界 ∂M に接した二つの接ベクトル $\vec{X_1}$, $\vec{X_2}$ に対して, それらの作る平行四辺形の面積を向きを込めて考えたものを $S(X_1, X_2) \in \mathbf{R}$ とするときに, $d\sigma(X_1, X_2) = S(X_1, X_2)$ で定義されるものである. (この notation にも係わらず, ∂M 上の完全形式ではない.)

問題 2. 2次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}\}$ から原点0を除いた空間 $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ を, ユークリッド空間の開集合として自然に C^∞ 級微分可能多様体とみなす. $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ 上の1次微分形式を

$$\omega \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

で定義する.

(1) $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ 上の極座標 $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ を用いて, ω を dr, $d\theta$ で表わせ.
(2) $d\omega = 0$ を証明せよ.
(3) $\omega = dF$ となるような $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ 上の C^∞ 級関数 F は存在するか?

問題 3. (代数学の基本定理) $n \geq 1$ とし, $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$ を n 次多項式とし, $f\colon \mathbf{C} \cong \mathbf{R}^2 \to \mathbf{C} \cong \mathbf{R}^2$ という C^∞ 級写像とみなす. $R > 0$ に対して, $D_R = \{z \in \mathbf{C} \mid |c| \leq R\}$ で原点を中心とする半径 R の円周 (の境界と内部) とする. ω を問題2. の $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ 上の1次微分形式とする.

(1) 十分大きな R を取ると (特に $f(\partial D_R)$ は原点を通らない),

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D_R} f^*\omega = n$$

となることを示せ. **ヒント**: $f_0(z) = z^n$ とし, f と f_0 をつなげてみよ.

(2) 上のような大きな R に対して $f(z) = 0$ が, D_R で解を持たないと仮定するとき, Stokes の定理を用いて

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D_R} f^*\omega = 0$$

となることを示し, このようなことがあり得ないことを証明せよ.

略解 1.

$$\mathrm{div}\, F = \nabla \cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

は, $d\omega_2 = \mathrm{div}\, F dx \wedge dy \wedge dz$ として現れる.

$$\mathrm{curl}\, F = \nabla \times F = (\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y})$$

であるから, $d\omega_1$ の $dy \wedge dz$, $dz \wedge dx$, $dx \wedge dy$ 成分を取れば, $\mathrm{curl}\, F$ が現れる.

湧き出し量定理の部分は, ω_2 の ∂M への制限が $(F, \vec{n})d\sigma$ で与えられることを見ればよい. これは容易にチェックできる.

略解 2. (1) $\omega = d\theta$

(2) 略

(3) **直感的な説明**: $\omega = dF$ とすると, (1) より, F と θ の差は定数である. ところが, θ は原点の回りを一周すると 2π ずれてしまうので, $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ 上の関数としては well-defined ではない. よって, このような F は存在しない.

この説明を厳密な証明にするためには、θ がどこで定義された関数なのか、はっきりとさせる必要がある。$\pi\colon \mathbf{R} \to S^1$ を射影として、$\pi^*\omega = d\theta$ が正しい定式化である。仮定のもとで $\pi^* F = \theta$ となってしまうことから矛盾をいう。

もしくは、授業で説明した定理の証明のように、次のようにしてもよい。

$\omega = dF$ であれば γ を原点の回りを一周する単位円として、$\int_\gamma \omega = F(1,0) - F(1,0) = 0$ であるが、実際に計算してみると $\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$ であることから、矛盾である。

略解 3. (1) $M = \partial D_R \times [0,1]$ という円柱を取り, 境界つき二次元多様体と考える. ($\partial M = \partial D_R \times \{0\} \sqcup \partial D_R \times \{1\}$ である.) $F(z,t) = tf(z) + (1-t)f_0(z)$ によって, $F\colon M \to \mathbf{C}$ を定義する. R を十分に大きく取れば, F は, 0 を取らず, $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ への写像を定める. したがって $F^*\omega$ は, M 上の C^∞ 級 1 次微分形式である. よって Stokes の定理より

$$0 = \int_M F^*(d\omega) = \int_M dF^*\omega = \int_{\partial M} \omega = \int_{\partial D_R} f^*\omega - \int_{\partial D_R} f_0^*\omega$$

となる. $\int_{\partial D_R} f_0^*\omega$ は, 具体的に計算して $2\pi n$ である.

(2) f が, D_R で零点を持たないと, f は $D_R \to \mathbf{C} \setminus \{0\}$ という写像となり, $f^*\omega$ は, D_R 上の C^∞ 級 1 次微分形式となる. したがって D_R に Stokes の定理を用いて

$$\int_{\partial D_R} f^*\omega = \int_{D_R} d(f^*\omega) = 0$$

となって矛盾する.