

幾何学II演習問題

担当: 中島 啓

2008年10月15日(水)

問題 8. 授業で省略した

$$H_c^k(M) \xrightarrow[e_*]{\pi_*} H_c^{k+1}(M \times \mathbf{R})$$

が互いに逆写像になることの証明を与えよ。

問題 9. (1) 写像 $r: \mathbf{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow S^1$ を $r(x) = x/|x|$ で定義すると、変形レトラクトになることを示せ。

(2) \mathbf{R}^2 から異なる二点を除いた領域は、二つの重ならない円周を合わせたものとホモトピックか？

(3) \mathbf{R}^n 内の領域 Ω が星形領域であるとは、ある点 $p \in \Omega$ が存在して、 p と別の点 $q \in \Omega$ を結ぶ線分が Ω の中に含まれているときをいう。写像 $r: \Omega \rightarrow \{p\}$ を $r(q) = p$ で定義すると、変形レトラクトになることを示せ。

問題 10. $f, g: M \rightarrow N$ は固有な C^∞ 級写像で、固有写像としてホモトピック、すなわち $F: M \times \mathbf{R} \rightarrow N$ という C^∞ 級写像で、 $F|_{M \times \{t\}} = f$ ($t \leq 0$), $F|_{M \times \{t\}} = g$ ($t \geq 1$) であり、さらに各 $F|_{M \times \{t\}}: M \rightarrow N$ が固有であるもの $F|_{M \times [0,1]}: M \times [0,1] \rightarrow N$ が固有であるものが存在するとする。このときコンパクト台のコホモロジーに誘導される写像

$$f^*, g^*: H_c^p(N, \mathbf{R}) \rightarrow H_c^p(M, \mathbf{R})$$

は等しいことを証明せよ。

問題 11. $X = \mathbf{R}^n$ とする。 $H_c^n(X, \mathbf{R}) = \mathbf{R}$ であった。 $[\alpha] \in H_c^n(X, \mathbf{R})$ で、 $\int_X \alpha = 1$ となるものを取っておく。固有な写像 $f: X \rightarrow X$ に対し、コホモロジーに誘導される写像 $f^*: H_c^n(X, \mathbf{R}) \rightarrow H_c^n(X, \mathbf{R})$ を考え、 f の写像度 $\deg f$ を $f^*[\alpha] = \deg f \times [\alpha]$ によって定義する。このとき

$$\deg f = \int_X f^* \alpha$$

が成り立つ。

(1) f が全射でなければ、 $\deg f = 0$ を証明せよ。

(2) $\deg f$ は整数であることを次の方針によって証明せよ。

- サードの定理により、ほとんどすべての $x \in X$ が f の正常値である。

- α として, x の小さな近傍のみの外では 0 になっているものを取る.
- このとき, $f^{-1}(x) = \{x_1, \dots, x_n\}$ とすると, f は, 各 x_i の近傍 U_i で微分同相である.
- $\int_{U_i} f^* \alpha = \pm 1$ である. ただし, \pm は, $f|_{U_i}$ が向きを保つかどうかで決まっている.
- $\deg f = \sum_{i=1}^n \pm 1$

(3) 問題 3 のように多項式 $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ を $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ の C^∞ 級写像と考える.

- f は固有写像であることを示せ.
- f は $f_0(z) = z^n$ と固有写像として問題 10 の意味でホモトピックであることを示せ.
- $\deg f_0 = n$ を示せ.

よって, 問題 10 により, $\deg f = n$ であり, 特に $n \geq 1$ ならば f は全射である.

略解 8. 教科書の Proposition 4.7 に他ならない。

略解 9. 略

略解 10. $e_0 = e_0(t)dt$, $e_1 = e_1(t)dt$ を, それぞれ $t = -1, t = 2$ の十分近くだけで, 0 でなく
て, $\int_{-\infty}^{\infty} e_{\alpha}(t)dt = 1$ ($\alpha = 0, 1$) となるように取っておく. このとき F の条件から

$$F^*\alpha \wedge e_0 = \pi^*f^*\alpha \wedge e_0, \quad F^*\alpha \wedge e_1 = \pi^*g^*\alpha \wedge e_1$$

が $M \times \mathbf{R}$ 上の微分形式として成立する. また, e_0, e_1 の積分の値に関する仮定から, $e_0 - e_1 = d\beta$ となるコンパクトな台をもつ \mathbf{R} 上の C^∞ 級関数 $\beta = \beta(t)$ が存在する. このとき $\beta \wedge F^*\alpha$ は, $F|_{M \times \{t\}}$ が固有であること $F|_{M \times [0,1]}$ が固有であることと, β の台がコンパクトであることから, コンパクトな台をもつ. すると

$$d(\beta \wedge F^*\alpha) = d\beta \wedge F^*\alpha = (e_0 - e_1) \wedge F^*\alpha$$

であるから, $F^*\alpha \wedge e_0 = \pi^*f^*\alpha \wedge e_0$ と $F^*\alpha \wedge e_1 = \pi^*g^*\alpha \wedge e_1$ が $H_c^{p+1}(M \times \mathbf{R})$ に定めるコホモロジー類は等しい. あとは $\pi_*: H_c^{p+1}(M \times \mathbf{R}) \rightarrow H^p(M)$ を適用すると,

$$\pi_*(\pi^*f^*\alpha \wedge e_0) = f^*\alpha, \quad \pi_*(\pi^*g^*\alpha \wedge e_1) = g^*\alpha$$

が (微分形式のレベルで) 成立することから結論が従う.

略解 11. (1) まず, f が固有であることから, f の像は閉集合である. (証明略) このとき, 写像度が微分形式 α の取り方によらないことに注意して, f の像の補集合に台を持つように α を取る. そうすると, $f^*\alpha$ は微分形式として恒等的に 0 である. よって $\deg f$ の定義式によって, $\deg f = 0$ である.

(2) 方針の通りなので略.

(3)

- 固有写像であること

いろいろなやり方があるが, たとえば立体射影を通じて, f が $S^2 = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ から $S^2 = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ への連続写像に拡張されることを確かめればよい. (何故か?)

- $f_0(z) = z^n$ と固有写像としてホモトピックであること.

$F(t, z) = z^n + f(t)(a_1z^{n-1} + \dots + a_n)$ とおけばよい. ただし, $f(t)$ は, $t \leq 0$ では 0, $t \geq 1$ では 1 となる \mathbf{R} 上の C^∞ 関数である.

- $\deg f_0 = n$ であること.

$f_0^{-1}(1) = \{e^{2\pi id/n} \mid d = 0, 1, \dots, n-1\}$ に注意し, 各 $e^{2\pi id/n}$ の回りで, f_0 が向きを保っていることをチェックして, (2) から, $\deg f_0 = n$ を得る.