# 幾何学II演習問題

担当: 中島 啓

2008 年 11 月 12 日 (水)

**問題 24.** $n$ 次元トーラス $T^n = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n\text{個}}$ を $\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ と思うことにする. $x = (x_1, \ldots, x_n)$ を $\mathbf{R}^n$ の座標とする. $A = (a_{ij})$ を $n \times n$ の整数成分の行列とする. $f_A \colon T^n \to T^n$ を $f_A(x \bmod \mathbf{Z}^n) = Ax \bmod \mathbf{Z}^n$ によって定義する. (well-defined であることに注意しよう.) このとき $H^*(T^n) \cong \bigwedge^* \mathbf{R}^n$ と表わしたときに, $f_A^* \colon H^*(T^n) \to H^*(T^n)$ を求めよ.

**問題 25.** $\mathbf{C}^2$ から二本の相異なる複素直線 $A$, $B$ を除いた補集合を $M$ とする. このとき, $H^*(M)$, $H_c^*(M)$ を, $A$ と $B$ が交わるとき, 交わらないときのそれぞれの場合について求めよ.

**問題 26.** $f \colon S^2 \to T^2$ を $C^\infty$ 級写像とする. このとき, $H^2(T^2) \xrightarrow{f^*} H^2(S^2)$ は 0 写像であることを証明せよ. (平成 19 年度大学院入試・数学 I より)

**問題 27.** $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ とし, $f \colon S^2 \to S^2$ を $f(x, y, z) = (-x, -y, -z)$ で定義する. $f^2 = \mathrm{id}$ であり, $\{\pm 1\}$ が $S^2$ に作用する. $S^2$ を $\{\pm 1\}$ で割った商空間は実射影平面 $\mathbf{R}P^2$ である. ($\mathbf{R}P^2$ は, $\mathbf{R}^3$ の中の原点を通る直線の全体であるから, 直線と $S^2$ の交わりの二点を取って, その二点を一つの点と見なす商空間をとれば実射影平面になる.) **問題 22** の手法を用いて $H^*(\mathbf{R}P^2)$ を計算せよ. そして $\mathbf{R}P^2$ については Poincaré 双対性が成立していないことから, 向きづけ可能でないことを観察せよ.

**詳解 24.** $T^n$ の $i$ 番目の $S^1$ は, $x_i$ を $0$ から $1$ まで動かすと得られる. したがって, $i$ 番目の $S^1$ の $H^1(S^1)$ の基底として $[dx_i]$ が得られる. ($x_i$ は, $T^n$ 上では well-defined ではないが, $dx_i$ は well-defined であることに注意する.) よってテンソル積の $i$ 番目の成分 $H^*(S^1)$ は, $\mathbf{R}\cdot 1 \oplus \mathbf{R}[dx_i]$ となる. Künneth の公式から $H^*(T^n)$ は,

$$[dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_p}] \qquad (i_1<\cdots<i_p)$$

を基底とする $\bigwedge^* \mathbf{R}^n$ と同型であった. このとき $A=(a_{ij})$ とすると, $\mathbf{R}^n$ では, $f_A^*(x_i) = x_i\circ f_A = \sum_j a_{ij}x_j$ である. よって, $f_A^* dx_i = \sum a_{ij}dx_j$ である. すなわち, $dx_1,\cdots,dx_n$ を基底と思うと, 表現行列が $A$ で与えられるものである. $f_A^*$ は, $H^1(T^n)\cong\mathbf{R}^n$ 上では $A$ に他ならない.

$H^k(T^n)$ の基底は, $[dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_k}]$ $(i_1<\cdots<i_k)$ であったことに注意すると, $f_A^*$ は, $H^k(T^n)\cong\bigwedge^k\mathbf{R}$ 上では, $A$ の $k\times k$ の小行列式でできる行列で与えられる.

**略解 25.** $\mathbf{C}^2\setminus(A\cup B)=(\mathbf{C}^2\setminus A)\cap(\mathbf{C}^2\setminus B)$ である. そして, $(\mathbf{C}^2\setminus A)\cup(\mathbf{C}^2\setminus B)$ は, $A$ と $B$ が交わる場合は $\mathbf{C}^2\setminus\{p\}$, そうでない場合は $\mathbf{C}^2$ 全体となる. ($p$ は $A$ と $B$ の交わりの点) これを $N$ で表わす.

まず, $\mathbf{C}^2\setminus A$ のコホモロジーを求める. $A=\{z_1=0\}$ とすると, $\mathbf{C}^2\setminus A\to\{z_2=0\}\setminus\{z_1=z_2=0\}$ という変形レトラクトが存在する. したがって

$$H^k(\mathbf{C}^2\setminus A)\cong H^k(\mathbf{C}\setminus\{0\})\cong H^k(S^1)$$

であり, $k=0,1$ のときに $\mathbf{R}$ で, それ以外のときには $0$ である.

Mayer-Vietoris 完全列により

$$\begin{array}{ccccc} H^i(N) & \longrightarrow & H^i(\mathbf{C}^2\setminus A)\oplus H^i(\mathbf{C}^2\setminus B) & \longrightarrow & H^i(M) \\ & & d^* & & \\ H^{i-1}(N) & \longrightarrow & H^{i-1}(\mathbf{C}^2\setminus A)\oplus H^{i-1}(\mathbf{C}^2\setminus B) & \longrightarrow & H^{i-1}(M) \end{array}$$

が成り立つ.

まず, $A$ と $B$ が交わらないときは, $N=\mathbf{C}^2$ なので, $H^i(M)\cong H^i(\mathbf{C}^2\setminus A)\oplus H^i(\mathbf{C}^2\setminus B)$ $(i>0)$ が分かる. したがって上と合わせて, $H^i(M)=\mathbf{R}^2$ ($i=1$ のとき), $=0$ ($i>1$ のとき) が分かる. $M$ は連結だから $H^0(M)=\mathbf{R}$ も分かる.

次に $A$ と $B$ が交わるときは, $N=\mathbf{C}^2\setminus\{p\}$ である. すると $N$ は, $S^3$ を変形レトラクトに持つから, $H^i(N)=\mathbf{R}$ ($i=0,3$ のとき) $=0$ (その他のとき) となる. そこで, 上の Mayer-Vietoris 完全列を見ると, $i=2$ として, $H^1(M)\cong H^1(\mathbf{C}^2\setminus A)\oplus H^1(\mathbf{C}^2\setminus B)=\mathbf{R}^2$ を得る. また, $i=3$ の場合を考えると,

$$0\to H^2(M)\to H^3(N)\to 0$$

を得る. したがって, $H^2(M)\cong\mathbf{R}$ である. $M$ は連結だから, $H^0(M)\cong\mathbf{R}$ であり, その他の次数のコホモロジ—がすべて消えていることも明らかである. $H_c^*(M)$ は, Poincaré 双対性より求まる.

**詳解 26.** $T^2 = S^1 \times S^1$ を $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ と見なして，$\mathbf{R}^2$ の座標を $x_1,\ x_2$ とすると，$H^2(T^2) \cong \mathbf{R}[dx_1 \wedge dx_2]$ であった．このとき，$H^*(T^2) \xrightarrow{f^*} H^*(S^2)$ は環準同型であること，すなわち

$$f^*([\alpha] \wedge [\beta]) = f^*[\alpha] \wedge f^*[\beta]$$

であることに注意すると，$f^*[dx_1 \wedge dx_2] = f^*[dx_1] \wedge f^*[dx_2]$ である．ところが，$S^2$ の $H^1(S^2)$ は $0$ であるから，$f^*[dx_1] = f^*[dx_2] = 0$ である．したがって $f^*[dx_1 \wedge dx_2] = 0$ が成り立つ．

**詳解 27.** **問題 22** により，

$$H^*(\mathbf{R}P^2) = H^*(S^2)^{f^*}$$

である．**問題 21**(2) により，$f$ の写像度は $-1$ である．すなわち，$H^2(S^2)$ に $f^*$ は $(-1)$ 倍で作用する．したがって，$H^2(S^2)^{f^*} = 0$ である．$H^0(S^2)$ への作用は恒等写像である．(何故か?) したがって $H^k(\mathbf{R}P^2) = \mathbf{R}$ ($k = 0$ のとき)，$= 0$ (そうでないとき) である．