幾何学II演習問題

担当: 中島 啓

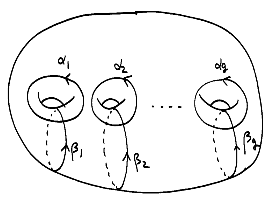
2008年11月19日(水)

問題 28. n 次元トーラス $T^n = \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ に対して, コホモロジーの基底を $[1] \in H^0(T^n)$, $[dx_1], \dots, [dx_n] \in H^1(T^n)$, $[dx_1 \wedge dx_2], \dots, [dx_{n-1} \wedge dx_n] \in H^2(T^2)$, etc. で定義する. このとき, T^n の部分多様体で, そのポアンカレ双対が, 基底のそれぞれの元になるようなものを構成せよ.

問題 29. (1) $\mathbf{R}^3$ から互いに交わらない k 本の直線 $(k \geq 0)$ を除いた空間 M_k のコホモロジー群 $H^q(M_k)$ と, コンパクト台のコホモロジー群 $H^q_c(M_k)$ を求めよ.

(2) M_k の閉部分多様体とコンパクトな部分多様体で, そのポアンカレ双対が, $H^q(M_k)$, $H^q_c(M_k)$ の基底になっているものの絵を描け. なぜ, 基底になっているのかの説明もつけること.

問題 30. **問題** 14 の Σ_g のコホモロジーについて, そのポアンカレ双対が $H^1(\Sigma_g)$ の基底になるように $2g$ 個の部分多様体を, 下図のように取れることを証明せよ.



問題 31. $\pi\colon TM \to M$ がベクトル束として向き付け可能であることと, M が多様体として向き付け可能であることが同値であることを証明せよ.

略解 28. $T^n = \underbrace{S^1 \times \cdots \times S^1}_{n\text{ 個}}$ の, 第 i 番目の S^1 を T^n の部分多様体と思って C_i で表すことにする. 向きは標準的に入れる. すると $i_1 < \cdots < i_k$, $j_1 < \ldots j_k$ に対して

$$\int_{C_{i_1}\times\cdots\times C_{i_k}} dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k} = \delta_{i_1 j_1} \ldots \delta_{i_k j_k}$$

である. また, $p_1 < \cdots < p_{n-k}$ に対して

$$\int_{T^n} \left(dx_{p_1} \wedge \cdots \wedge dx_{p_{n-k}}\right) \wedge (dx_{j_1} \wedge \ldots dx_{j_k}) = \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} & n \\ p_1 & \ldots & p_{n-k} & j_1 & \ldots & j_k \end{pmatrix}$$

である. ただし, $p_1, \ldots p_{n-k}$, $j_1, \ldots, j_k$ に重複があるときには, sgn は 0 と約束する. したがって, $[dx_{p_1} \wedge \cdots \wedge dx_{p_{n-k}} \in H^{n-k}(T^n)$ のポアンカレ双対は

$$\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots} & n \\ p_1 & \ldots & p_{n-k} & j_1 & \ldots & j_k \end{pmatrix} C_{j_1} \times \cdots \times C_{j_k}$$

である. ただし, $j_1 < \cdots < j_k$ は, $p_1, \ldots, p_{n-k}$ を $\{1, \ldots, n\}$ から除いたものである.

略解 29. (1) k 番目の直線を L_k とし, 十分小さい $\varepsilon > 0$ を取り, L_k の管状近傍 $U_k = \{x \in \mathbf{R}^3 \mid \operatorname{dist}(x, L_k) < \varepsilon\}$ を取る. $M_k \cup U_k = M_{k-1}$, $M_k \cap U_k \cong \mathbf{R} \times (D^2 \setminus \{0\})$, $U_k \cong \mathbf{R} \times D^2$ である. ただし, $\cong$ は微分同相の意味で, $D^2 = \{x \in \mathbf{R}^2 \mid |x| < \varepsilon\}$ である.

Mayer-Vietoris 完全列により,

$$\begin{tikzcd}
H^3(M_{k-1}) \arrow[r] & H^3(M_k) \oplus H^3(\mathbf{R} \times D^2) \arrow[r] & H^3(\mathbf{R} \times (D^2 \setminus \{0\})) \\
H^2(M_{k-1}) \arrow[r] & H^2(M_k) \oplus H^2(\mathbf{R} \times D^2) \arrow[r] & H^2(\mathbf{R} \times (D^2 \setminus \{0\})) \arrow[ull, "d^*"'] \\
H^1(M_{k-1}) \arrow[r] & H^1(M_k) \oplus H^1(\mathbf{R} \times D^2) \arrow[r] & H^1(\mathbf{R} \times (D^2 \setminus \{0\})) \arrow[ull, "d^*"'] \\
H^0(M_{k-1}) \arrow[r] & H^0(M_k) \oplus H^0(\mathbf{R} \times D^2) \arrow[r, "\varphi"'] & H^0(\mathbf{R} \times (D^2 \setminus \{0\})) \arrow[ull, "d^*"']
\end{tikzcd}$$

となる. ここで, $H^q(\mathbf{R} \times D^2) = \mathbf{R}$ $(q = 0)$, $= 0$ $(q \neq 0)$ と, $H^q(\mathbf{R} \times (D^2 \setminus \{0\})) = \mathbf{R}$ $(q = 0, 1)$, $= 0$ $(q \neq 0, 1)$ を代入する.

まず, $H^3(M_k) \cong H^3(M_{k-1})$ であるが, $H^3(M_0) = H^3(\mathbf{R}^3) \cong 0$ であるから, $H^3(M_k) \cong 0$ を得る.

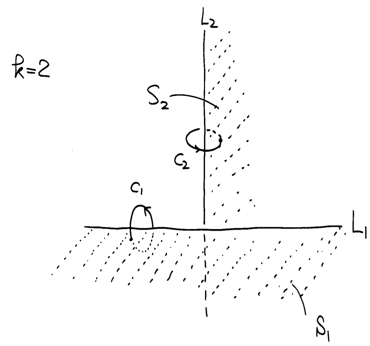
次に $H^2(M_{k-1})$ から $H^2(M_k)$ への全射が存在するが, $H^2(M_0) = 0$ であるから, 帰納的に $H^2(M_k) = 0$ が分かる.

また, M_k が連結であることは明らかであるから, $H^0(M_k) = \mathbf{R}$ であり, φ が全射であることも分かる. そうすると,

$$0 \to H^1(M_{k-1}) \to H^1(M_k) \to H^1(\mathbf{R} \times (D^2 \setminus \{0\})) \to 0$$

という短完全列を得る. したがって帰納的に $H^1(M_k) \cong \mathbf{R}^k$ である.

(2) C_k を L_k の回りを一周する小さな円, S_k を L_k を境界に持つような半平面としする.



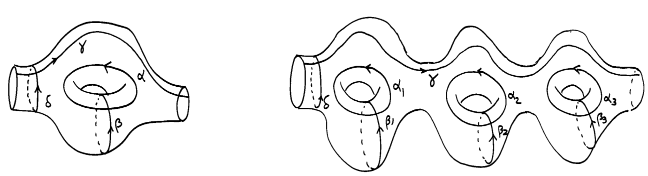
このとき C_k は, (1) の証明の最後に出てきた短完全列から

$$\begin{CD}
0 @>>> H^1(M_{k-1}) @>>> H^1(M_k) @>>> H^1(\mathbf{R}\times(D^2\setminus\{0\})) @>>> 0\\
@. @V{\left(\int_{C_i}\bullet\right)_{i=1}^{k-1}}VV @VV{\left(\int_{C_i}\bullet\right)_{i=1}^{k}}V @VV{\int_{C_k}}V @.\\
0 @>>> \mathbf{R}^{k-1} @>>> \mathbf{R}^k @>>> \mathbf{R} @>>> 0
\end{CD}$$

という可換図式を作ることができる. 帰納法と, 一番右の縦矢印が同型であることと, five lemma により, 真ん中の縦矢印も同型である. したがって $\{C_i\}_{i=1}^k$ のポアンカレ双対は $H^1(M_k)$ の基底になる.

S_i についても同様.

略解 30. **問題** 14 の証明を詳しく見直して, $H^1(\Sigma_g)$ の基底を適当に作り, そのポアンカレ双対を作ればよい. 例えば, まず $H^1(\Sigma_1\setminus D_1\cup D_2)$ については下図の部分多様体 α, β, γ, $H^1_c(\Sigma_1\setminus D_1\cup D_2)$ については下図の部分多様体 α, β, δ を取ればよい. (詳細略) これを g 個貼り合わせて, 最後に円板 2 枚を貼り合わせて Σ_g はできる. このとき, Mayer-Vietoris 完全列を書いて, 基底を丁寧に書いてみる. 一つピースを貼り合わせるとき, 新しいピースにあった α, β はそのまま生き残り, γ は前からあったピースの γ とつなげられる. そして新しいピースの δ は消される. (下の図の右側参照) 最後に円板 2 枚を貼り合わせるとき, 一本につなげられていた γ と, 最後に一個だけのこって残っていた一番最初の δ とは消えてしまう. (詳細略) すると結局最後に残るのは, 問題の図のようになる.



略解 31. TM にベクトル束としての向きが与えられたら、M の局所座標系の向きが正というのを, TM の向きと同じ向きが T_xM に定まっているものとして定義することができる。このとき座標変換の微分の行列式は常に正である.