幾何学II演習問題

担当: 中島 啓

2008年12月17日(水)

問題 43. 先週の**問題 41**, **42** で、うちで復習したものがあれば、ノートを提出するか、書き写し、もしもまだやっていない問題があれば、もう一回やりなさい。

問題 44. X を位相空間とし, SX を $X \times [0,1]$ の $X \times \{0\}$ を一点につぶし, $X \times \{1\}$ を別の一点につぶしてできる位相空間とする. X の懸垂という. (例えば S^{n-1} の懸垂は S^n と同相である. このとき

$$H_q(SX;\mathbf{Z}) \cong \tilde{H}_{q-1}(X;\mathbf{Z})$$

が $q \geq 1$ に対して成り立つことを示せ. ただし, $\tilde{H}_{q-1}$ は簡約ホモロジーである.
(ヒント : SX を S^n のときのように二つに分けよ.)

問題 45. $D^n = \{x \in \mathbf{R}^n \mid |x| \leq 1\}$, $S^{n-1} = \{x \in \mathbf{R}^n \mid |x| = 1\}$ とする. $\partial D^n = S^{n-1}$ である.
(1) 連続写像 $r\colon D^n \to S^{n-1}$ で $r|_{\partial D^n}$ が恒等写像になるものが存在しないことを示せ.
(2)(**Brouwer の不動点定理**) 連続写像 $f\colon D^n \to D^n$ は、固定点、すなわち $f(x) = x$ となるような $x \in D^n$ を持つことを示せ.

以下、教科書 Remark 15.13 を参照. 解答は、適当な代数の教科書で各自自習すること.
R を単項イデアル整域 (e.g., $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}[X]$) とする. 直和 R-加群 $\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$ で、各 M_λ が R と同型になっているものを**自由** R-加群という. 自由 R-加群の部分群は, やはり自由 R-加群であることが知られている.
M を勝手な R-加群とするとき, 自由 R-加群 F_0 からの全射 $F_0 \xrightarrow{p} M$ が存在する. そして $\operatorname{Ker} p$ は上の注意からやはり自由 R-加群であり、これを F_1 と書く。したがって完全列

$$0 \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$$

を得る. このように R-加群 M が与えられたとき、上の形の完全列で F_0, F_1 が共に自由 R-加群になるもののことを M の**自由分解**という.

問題 46. R は単項イデアル整域とする. A, A' を R-加群とし, R-準同型 $f\colon A \to A'$ があったとする. このとき A, A' の 自由分解を取り, 図式

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & F_1 & \xrightarrow{d} & F_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & A & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & & & \big\downarrow{\scriptstyle f} & & \\
0 & \longrightarrow & F_1' & \xrightarrow{d'} & F_0' & \xrightarrow{\varepsilon'} & A' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

を考える．このとき，

(1)

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & F_1 & \longrightarrow & F_0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & 0 \\ & & \Big\downarrow{\scriptstyle \varphi_1} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \varphi_0} & & \Big\downarrow{\scriptstyle f} & & \\ 0 & \longrightarrow & F_1' & \xrightarrow{d'} & F_0' & \xrightarrow{\varepsilon'} & A' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

が可換図式となるような R-準同型 φ_0, φ_1 が存在することを示せ．

(2) 上の φ_0, φ_1 の他に同じ性質を満たす ψ_0, ψ_1 を取ったとする．このとき，R-準同型 $\Phi\colon F_0 \to F_1'$ で $d'\Phi = \psi_0 - \varphi_0$, $\Phi d = \psi_1 - \varphi_1$ を満たすものが存在することを示せ．

問題 47. (1) A, B を R-加群とし、$0 \to F_1 \xrightarrow{d} F_0 \to A \to 0$ を自由分解とする．このとき

$$F_1 \otimes B \xrightarrow{d \otimes \mathrm{id}_B} F_0 \otimes B \to A \otimes B \to 0$$

は完全であることを示せ．次に，$\mathrm{Ker}(d \otimes \mathrm{id}_B)$ が自由分解の取り方によらずに同型になることを示せ．これを $\mathrm{Tor}^R(A,B)$ と書く。

同様に

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(A,B) \to \mathrm{Hom}_R(F_0,B) \xrightarrow{{}^t d \otimes \mathrm{id}_B} \mathrm{Hom}_R(F_1,B)$$

が完全であることを示し，$\mathrm{Coker}\,{}^t(d \otimes \mathrm{id}_B)$ が自由分解の取り方によらずに同型になることを示せ．これを $\mathrm{Ext}_R(A,B)$ と書く。

(1) m, n を正整数とする．$\mathrm{Tor}^{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$, $\mathrm{Ext}_{\mathbf{Z}}(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$ を求めよ．

(2) $0 \to A \to B \to C \to 0$ が R-加群の短完全列であるとすると，

$$\begin{array}{l} 0 \longrightarrow \mathrm{Tor}^R(A,D) \longrightarrow \mathrm{Tor}^R(B,D) \longrightarrow \mathrm{Tor}^R(C,D) \\ \longrightarrow A \otimes_R D \longrightarrow B \otimes_R D \longrightarrow C \otimes D \longrightarrow 0 \end{array}$$

となる連結準同型が定義されて，長完全列になることを示せ．

(3) $\mathrm{Tor}^R(A,B) \cong \mathrm{Tor}^R(B,A)$ を示せ．

難問 48. (Künneth) R は単項イデアル整域とする．自由な R 加群からなる複体 (C^*, d), (C'^*, d') を考える．二重複体 $(C^* \otimes C'^*, d \otimes 1, 1 \otimes d')$ の total cohomology $H^*(C^* \otimes C'^*)$ に対し，

$$0 \to \bigoplus_{p+q=n} H^p(C^*) \otimes_R H^q(C'^*) \to H^n(C^* \otimes C'^*) \to \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}^R(H^p(C^*), H^q(C'^*)) \to 0$$

という自然な短完全列で，しかも分裂するものが存在することを示せ．

特に $C'^* = G$ $(* = 0)$ のとき，$= 0$ (それ以外のとき) と取ることにより，次の普遍係数定理を得る．

定理 0.1 R は単項イデアル整域とする．自由な R 加群からなる複体 (C^*, d), を考える．R-加群 A に対して，

$$0 \to H^n(C^*) \otimes_R A \to H^n(C^* \otimes A) \to \mathrm{Tor}^R(H^{n-1}(C^*), A) \to 0$$

という自然な短完全列で，しかも分裂するものが存在する．

略解 43.

詳解 44. $SX = C_+X \cup C_-X$, $C_+X = X \times [0,1)$ の, $X \times \{0\}$ を一点につぶしたもの, $C_-X = X \times (0,1]$ の $X \times \{1\}$ を一点につぶしたものと分ける. $C_+X \cap C_-X = X \times (0,1)$ は, X とホモトピックである. また, $C_\pm X$ は, それぞれ端の点に縮めていけるので一点とホモトピックである. よって簡約ホモロジーに関する Mayer-Vietoris 完全列

$$\begin{array}{ccccc} \tilde{H}_q(C_+X \cap C_-X) & \longrightarrow & \tilde{H}_q(C_+X) \oplus \tilde{H}_q(C_-X) & \longrightarrow & \tilde{H}_q(SX) \\ \tilde{H}_{q-1}(C_+X \cap C_-X) & \longrightarrow & \tilde{H}_{q-1}(C_+X) \oplus \tilde{H}_{q-1}(C_-X) & \longrightarrow & \tilde{H}_{q-1}(SX) \end{array}$$

において, $\tilde{H}_q(SX) \cong \tilde{H}_{q-1}(X)$ が, 全ての $q \geq 1$ について成り立つことが, ただちに分かる. また、この場合は $\tilde{H}_q(SX)$ は, $H_q(SX)$ と同じであるから結論が従う.

略解 45. (1) 略

(2) 全ての $x \in D^n$ について $f(x) \neq x$ と仮定する. $f(x)$ から x へ直線を引き, ∂D^n とぶつかる点を $r(x)$ と定める. 仮定から $r\colon D^n \to S^{n-1}$ が定まる. 連続であることが示される. また $x \in \partial D^n$ ならば $r(x) = x$ である. これは, (1) と矛盾する. したがって, f は固定点を持つ.