

幾何学入門試験

担当: 中島 啓

2009年1月30日(金) 10:30 12:00 (90分)

12/19に行った小テストの60点に、今回のテストの80点(問1=20点、問2,3=30点)を加え、100点以上は切捨てることによって最終成績とする。小テストの成績を加味せず、今回の試験の点を1.25倍して100点満点として採点して最終評価を希望するものは、名前の欄のすぐ下にその旨を書くこと。

採点した答案は、再来週のいつかから理学部3号館数学教室事務室で返却する。(同時に模範回答を掲示する。)その後、採点に異議のあるものは申し出ること。ただし、採点に間違いがあったと認められる場合以外、評価の変更は受け付けられない。

問題 1 (20 点) 陰関数定理 (逆関数定理ではない!) の主張を正確に記せ。ただし証明を与える必要はない。必要な条件は漏らさず書くこと。

問題 2 (30 点) $a, b, c > 0$ として、 \mathbf{R}^3 の部分集合

$$M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$$

を考える。

(1) M が \mathbf{R}^3 に埋め込まれた C^∞ 級多様体 (すなわち、授業でやった意味の多様体) であることを証明せよ。

(2) M の点 (x, y, z) における接空間を $\mathbf{R}^3 = T_{(x,y,z)}\mathbf{R}^3$ の部分空間として記述せよ。

(3) M 上の関数 $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ を $f(x, y, z) = x + y + z$ で定義する。 f が C^∞ 級関数であることを証明せよ。

(4) f の臨界点をすべて求めよ。

(4) まで到達していなければ、部分点はないこととする。

問題 3 (30 点) 向きづけられた C^∞ 級多様体 M, N 間の C^∞ 級写像 $f: M \rightarrow N$ を考える。

(1) 多様体の向きとは何か説明せよ。

(2) f の写像度 $\deg f$ は、 $y \in N$ の逆像の個数を適当に数えることによって、整数として定義される。この定義のために必要な f, M, N , および点 y が満たすべき仮定をすべて書き、またその仮定が満たされるときに写像度の定義を述べよ。ただし、定義が well-defined であることの証明は与えなくてよい。

ただし、ホモロジー群を使って定義する場合は、その定義のもとで、逆像の個数をどのように数えることによって計算できるかをきちんと説明すること。

(3) $M = N = S^1 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ とし、 $f: M \rightarrow N$ を $f(\cos \theta, \sin \theta) = (\cos n\theta, \sin n\theta)$ とおく。ただし n は整数である。 f の写像度を (1) で与えた定義にしたがって計算して n であることを証明せよ。このとき、(1) で仮定された条件がすべて満たされていることを説明すること。また、向きをどのように入れたか説明すること。

訂正. 上の (3) の中に出てくる (1) はいうまでもなく、(2) の間違いである。