数学基礎演習 – 幾何学入門演習問題

担当: 中島 啓

2008 年 11 月 20 日 (木)

問題 $F\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ を C^∞ 級関数とし, M をそのグラフ, すなわち

$$M = \{(x, y) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^{n+1} \mid y = F(x)\}$$

とする. M 上の関数 $f\colon M \to \mathbf{R}$ を $f(x, y) = y$ で定義する. このとき,

(1) 点 (x, y) における M の接空間 $T_{(x,y)}M$ を求めよ.

(2) f の臨界点, すなわち f の微分 $df_{(x,y)}\colon T_{(x,y)}M \to \mathbf{R}$ が 0 になる点をすべて求めよ.

略解　(1) $T_{(x,y)}M = \{(v,w) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \mid w = DF(x)v\}$ であることは容易にチェックできる.

(2) (解答例 1) f の拡張 $\widetilde{f}$ を $\widetilde{f}(x,y) = y$ で定める. $df_{(x,y)}$ は $D\widetilde{f}$ の $T_{(x,y)}M$ への制限である.

$$D\widetilde{f}(v,w) = w, \qquad (v,w) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$$

であるから,

$$df_{(x,y)} = 0 \Longleftrightarrow \text{すべての } v \in \mathbf{R}^n \text{ について } DF(x)v = 0$$

である. すなわち f の臨界点は, F の微分が消える点を x として, $(x, F(x))$ となる点である.

(解答例 2) $g\colon \mathbf{R}^n \to M$ を $g(x) = (x, F(x))$ で定めると, g は M の座標を与えている. 従って, $f \circ g$ の微分が消える点を x としたとき, $g(x)$ が f の臨界点である. $f \circ g(x) = F(x)$ だから, f の臨界点は, F の微分が消える点を x として, $(x, F(x))$ となる点である.