数学基礎演習 – 幾何学入門演習問題

担当: 中島 啓

2008 年 11 月 27 日 (木)

問題　S^n を n 次元の超球, すなわち $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$ とする. 写像 $f\colon S^3 \to S^2$ を

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2(x_1x_3 + x_2x_4), 2(x_1x_4 - x_2x_3), x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2)$$

によって定める.

(1) f の像が S^2 に入っていることをチェックせよ.

(2) $x = (1, 0, 0, 0) \in S^3$ における f の微分 $df(x)\colon T_xS^3 \to T_{f(x)}S^2$ を計算し, それが全射であることを証明せよ.

略解　(1) 略

(2) $\tilde{f}$ を同じ式で定義される $\mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ の写像とする.

$$D\tilde{f}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である. $T_xS^3 = \{(v_1, v_2, v_3, v_4) \mid v_1 = 0\}$ であり, $f(x) = (0, 0, 1)$ で, $T_{f(x)}S^2 = \{(w_1, w_2, w_3) \mid w_3 = 0\}$ である. よって, df_x は上の行列が与える線形写像を $\{(v_1, v_2, v_3, v_4) \mid v_1 = 0\}$ に制限したものである. その像は $\{(2v_3, 2v_4, 0) \mid v_3, v_4 \in \mathbf{R}\} = \{(w_1, w_2, w_3) \mid w_3 = 0\}$ であるから, df_x は全射である.