# 数学基礎演習 – 幾何学入門演習問題

担当: 中島 啓

2009 年 1 月 8 日 (木)

**問題**　二次元球面 $S^2 = \{(a,b,c) \in \mathbf{R}^3 \mid a^2+b^2+c^2=1\}$ の北極からの立体射影 $\varphi\colon S^2 \setminus \{(0,0,1)\} \to \mathbf{C}$

$$\varphi(a,b,c) = \frac{a}{1-c} + i\frac{b}{1-c}$$

を考える. ($i$ は虚数単位.) $\varphi$ が全単射であることは断りなしに使ってよい. 複素数係数の $n$ 次式 $f(z) = z^n$ に対して, 写像 $\widetilde{f}\colon S^2 \to S^2$ を

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi(x) & x\text{ が北極でないとき} \\ \text{北極} & x\text{ が北極のとき} \end{cases}$$

で定義する. $\widetilde{f}$ が $C^\infty$ 級写像であることは証明なしに使ってよい.
　このとき、$\widetilde{f}$ の写像度が $n$ であることを証明せよ。

ヒント: $\varphi$ によって $S^2$ の向きを $\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$ の向きの移し、$f$ の微分が向きを保つかどうか調べよ。

**略解**　$\zeta = \exp(2\pi i/n)$ とすると、$f^{-1}(1) = \{1, \zeta, \ldots, \zeta^{n-1}\}$ である。また, $\widetilde{f}$(北極) $\neq 1$ であるから、北極は考慮に入れる必要はない。

$$\frac{\partial f}{\partial z}|_{z=\zeta^k} = n\zeta^{k(n-1)} = n\left(\cos(\frac{2\pi ik(n-1)}{n}) + i\sin(\frac{2\pi ik(n-1)}{n})\right)$$

であるから、授業でやったように, $f$ を $\mathbf{R}^2$ から $\mathbf{R}^2$ への写像と思ったときのヤコビアンは,

$$n\begin{bmatrix}\cos(\frac{2\pi ik(n-1)}{n}) & -\sin(\frac{2\pi ik(n-1)}{n}) \\ \sin(\frac{2\pi ik(n-1)}{n}) & \cos(\frac{2\pi ik(n-1)}{n})\end{bmatrix}$$

であり、行列式は $> 0$ である。ヒントにあるように $\mathbf{R}^2$ の標準的な向きについて、向きが保たれるかどうかを考えればよい (証明略) から、$\mathrm{sgn}(\varphi; \zeta^k) = 1$ である。よって写像度は $n$ である。