

数学基礎演習 – 幾何学入門演習問題

担当: 中島 啓

2009年1月15日(木)

問題 写像 $f: L \rightarrow M, g: M \rightarrow N$ は、それぞれ写像度が定義される仮定を満たしているとする。このとき合成写像 $g \circ f: L \rightarrow N$ の写像度 $\deg(g \circ f)$ が $\deg g \deg f$ に等しいことを証明せよ。

略解 $z \in N$ を $g \circ f$ の正常値とする。このとき $y \in g^{-1}(z)$, $x \in f^{-1}(y)$ と取る。 $d(g \circ f)_x: T_x L \rightarrow T_z N$ は $dg_y df_x$ に等しい。 z が $g \circ f$ の正常値であるという仮定から、 $d(g \circ f)_x$ は同型写像であり、したがって dg_y, df_x は共に同型写像でなければならない。特に、 z は、 g の正常値であり、 y は f の正常値である。

さらに、向きについて考えると $\operatorname{sgn} d(g \circ f)_x = \operatorname{sgn} dg_y \operatorname{sgn} df_x$ である。したがって、

$$\begin{aligned} \deg(g \circ f) &= \sum_{x \in (g \circ f)^{-1}(z)} \operatorname{sgn} d(g \circ f)_x = \sum_{\substack{x \in (g \circ f)^{-1}(z) \\ y=f(x)}} \operatorname{sgn} dg_y \operatorname{sgn} df_x \\ &= \sum_{y \in g^{-1}(z)} \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{sgn} dg_y \operatorname{sgn} df_x = \sum_{y \in g^{-1}(z)} \operatorname{sgn} dg_y \deg f = \deg g \deg f \end{aligned}$$

となる。