

# 数学基礎演習 – 幾何学入門演習問題

担当: 中島 啓

2008年10月9日(木)

問題 関数  $F: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  を

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

で定める. naive な意味で定義される ‘曲線’  $\{(x, y) \mid F(x, y) = 0\}$  の特異点を求めよ. さらに, 接線が垂直になる点を求めよ.

略解

$$DF = (3x^2 - 3y \quad 3y^2 - 3x)$$

$F(x, y) = 0$  を満たす点で  $DF = 0$  となる点をもとめると,  $(x, y) = (0, 0)$  のみである. これが特異点である. つぎに  $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$  となる点が接線が垂直になる点である. これを求めると,  $(x, y) = (0, 0)$ , もしくは  $(4^{1/3}, 2^{1/3})$  である. 前者  $(x, y) = (0, 0)$  では, 接線が引けないので除く. よって後者が求める点である.