数学基礎演習 – 幾何学入門演習問題

担当: 中島 啓

2008 年 10 月 16 日 (木)

問題　授業では、$\mathbf{R}^n$ の開集合 U 上定義された関数 $f\colon U \to \mathbf{R}^m$ が点 a で全微分可能であることを $h \to 0$ のときに

$$\frac{|f(a+h) - f(a) - Ah|}{|h|} \to 0$$

となる線形写像 A が存在することと定義し、この A を Df_a と書いた。
　上の微分の定義に従い, 合成関数の微分法則

$$D(g \circ f)_a = Dg_{f(a)} Df_a$$

を証明せよ.

略解

$$
\begin{aligned}
f(a+h) &= f(a) + Df_a h + e_1(h) \\
g(f(a)+k) &= g(f(a)) + Dg_{f(a)} k + e_2(k)
\end{aligned}
$$

とする. $|e_1(h)|/|h| \to 0$, $|e_2(k)|/|k| \to 0$. このとき $k = Df_a h + e_1(h)$ を代入して,

$$
g(f(a+h)) - g(f(a)) = Dg_{f(a)} Df_a h + Dg_{f(a)} e_1(h) + e_2(Df_a h + e_1(h))
$$

このとき $|e_2(Df_a h + e_1(h))|/|h|$ と $|e_2(Df_a h + e_1(h))|/|h|$ がともに 0 に収束することをみればよい. これは ε-δ 論法で証明できる.