

数学基礎演習 – 幾何学入門演習問題

担当: 中島 啓

2008年11月6日(木)

問題 ε を十分小さな正数とし, $f: \mathbf{R} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbf{R}^3$ を

$$f(u, v) = 2 \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} \sin(-u/2) \cos u \\ \sin(-u/2) \sin u \\ \cos(-u/2) \end{pmatrix}$$

とおく. このとき $f(u + 2\pi, v) = f(u, -v)$ となっていることに注意しよう. f の像 M をメビウスの帯という. (ε を十分に小さく取れば) メビウスの帯が $(\mathbf{R}^3$ に埋め込まれた) 多様体であることを証明できるが, きちんと証明しようとする面倒な部分があるので, 以下のようにその概略だけチェックせよ.

(1) $v = 0$ のときに f の微分 df は単射であることを示せ. したがって, 十分に小さな ε を取れば, df は $[0, 2\pi] \times (-\varepsilon, \varepsilon)$, したがって周期性により, $\mathbf{R} \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ でも単射である.

(2) f を M のパラメータ表示として, M が多様体であることを証明したい. しかし, f そのままでは, 定義域が大きいためまずい. 授業でやった多様体のパラメータ表示の中のどの条件が成り立っていないのだろうか? 定義域をどのようにとって成り立つようにしたらいいだろうか?

略解 (1)

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{v=0} &= 2 \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{\partial f}{\partial v}\Big|_{v=0} &= \begin{pmatrix} \sin(-u/2) \cos u \\ \sin(-u/2) \sin u \\ \cos(-u/2) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる. f の微分が単射である必要十分条件は, ベクトル積 $\frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial f}{\partial v}$ が 0 でないことである. これは容易にチェックできる.

(2) $f: \mathbf{R} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ が同相写像でなければならないが, そもそも周期性があるのだから, 単射になるわけではなく, これは成立しない.

そこで, 定義域と \mathbf{R}^3 を適当に分けて, 写像の制限が同相写像になるようにすればよい. たとえば, 次のようにする.

$U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x, y) \text{ は第一, 第二, 第三象限のいずれか}\}$, $U_2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid (x, y) \text{ は第一, 第三, 第四象限のいずれか}\}$ とおく. ただし, それぞれの集合のはじは取り除いておく. U_1, U_2 は \mathbf{R}^3 の開集合で, $M = (M \cap U_1) \cup (M \cap U_2)$ が成り立つ. このとき

$$f: (0, 3\pi/2) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \cap U_1, \quad f: (-\pi, 2/\pi) \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M \cap U_2$$

となることが分かる. (f の (x, y) 成分を取ると, $(2 + v \sin(-u/2)) \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \end{pmatrix}$ であり, $(2 + v \sin(-u/2)) > 0$ に注意せよ.) このとき, 上の二つの f を制限した写像が, それぞれ同相写像であることを示せばよい.

これは少し面倒だが, チェックできる.