

略解 13. まず, F の微分 $dF_p: T_pM \rightarrow T_{F(p)}N$ は線形空間の間の同型写像である. 実際, 逆写像は $d(F^{-1})_{F(p)}$ である. よって $\dim T_pM = \dim T_{F(p)}N$ であり, 多様体の次元は接空間の線形空間としての次元に等しいから, $\dim M = \dim N$ が成り立つ.

略解 14. (1) \mathcal{O} が開基であることを示すためには, V を M の開集合とすると, V が \mathcal{O} に含まれる開集合の和で表わされることを示せばよい. 座標近傍系 $\{(\varphi_i, U_i)\}_{i \in I}$ に対して $\{U_i\}_{i \in I}$ は M の開被覆であったから, $V = \bigcup_{i \in I} (V \cap U_i)$ が成り立つ. また, $V \cap U_i$ は U_i に含まれる開集合であり, \mathcal{O} の元である. よって \mathcal{O} が開基であることが分かった.

(2) 必要条件であることは, C^∞ 写像の合成が再び C^∞ 級であることから従う.

充分条件であることを示す. まず, F は連続写像であることを示す. ユークリッド空間内の球 $B_r(p) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - p| < r\}$ の全体が, \mathbb{R}^n の位相空間の開基であることから, (1) の開基の開集合 V の条件に, さらに $U' = \varphi(U)$ に閉包まで込めて入っている球 $B_r(p)$ の φ による逆像 $V = \varphi^{-1}(B_r(p))$ であるという条件を付け加えても, やはり開基になっている. このとき $B_r(p)$ 上で正, その外で 0 となるような \mathbb{R}^n 上の C^∞ 級関数 f を取り, $f \circ \varphi$ を U の外で 0 とおくことにより, M 上の C^∞ 級関数を定め, g とする. 条件から $g \circ F$ は, M 上の C^∞ 級関数であり, したがって特に連続関数である. $\{x \in M \mid g \circ F(x) \neq 0\}$ は, M の開集合である. ところが, これは, $F^{-1}(V)$ に他ならない. よって, F は連続である.

次に, F が C^∞ 級であることを示す. $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ を開集合 U 上で定義された N の座標とすると, (必要ならば U を小さく取り直して,) $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ は N 全体で定義された関数 (同じ記号で表わす) の制限であるとして構わない. したがって仮定から $\varphi_i \circ F$ は M 上の C^∞ 級関数である. M 上の C^∞ 級関数の定義に戻れば, これは座標系 (V, ψ) を取って $(\varphi \circ F)|_V \circ \psi^{-1}$ が C^∞ 級である. F は連続であるから, $F(V) \subset U$ となるように V を小さく取り直して構わない. すると, これは, F が C^∞ 級であることに他ならない.

略解 15. (1) $v = \left. \frac{dc}{dt} \right|_{t=0}$ とおく. C^∞ 級関数 f に対して, $vf = \left. \frac{df(c(t))}{dt} \right|_{t=0}$ とおけば, 接ベクトルの定義の性質を満す.

(2) x が原点に移される座標 $\varphi: U \rightarrow V$ を取って, $v = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ と表わしたとき, $c(t) = \varphi^{-1}(a_1 t, a_2 t, \dots, a_n t)$ とすればよい. このとき上のように定めたものが, v になることは座標を取って考えているので明らかである.

略解 16. $\mathbb{R}P^n$ には非同次座標を入れて考える. $U_0 = \{x_0 \neq 0\}$ では,

$$f([1 : y_1 : y_2 : \dots : y_n]) = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n y_i^2}$$

となり, C^∞ 級である. 微分は,

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} = -\frac{2y_i}{(1 + \sum_{i=1}^n y_i^2)^2}$$

で与えられ, $y_1 = y_2 = \dots = y_n = 0$ が微分が消えているような点である. $U_i = \{x_i \neq 0\}$ ($i \geq 1$) では,

$$f([y_1 : y_2 : \dots : y_{i-1} : 1 : y_i : \dots : y_n]) = \frac{y_1^2}{1 + \sum_{i=1}^n y_i^2}$$

となり、ここでも C^∞ 級である。微分は、

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} = \frac{2y_1(1 + y_2^2 + \cdots + y_n^2)}{(1 + \sum_{i=1}^n y_i^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} = -\frac{2y_1^2 y_i}{(1 + \sum_{i=1}^n y_i^2)^2} \quad (i \geq 2)$$

で与えられ、 $y_1 = 0$ で微分が消えていることが確かめられる。微分が消えている点は、 $[1 : 0 : \cdots : 0]$ と $[0 : x_1 : x_2 : \cdots : x_n]$ (但し x_1, \dots, x_n は任意) である。最大値 (最小値) をとる点では微分が消えているので、 f の最大値、最小値はそれぞれ 1 と 0 である。

略解 17. (1) 問題 7 のように座標をとって考える。 $U_j = \{x_j \neq 0\}$ 上では包含写像の微分は、以下で与えられる。

$$d(i \circ \varphi_j^{-1})\left(\sum_{1 \leq k \leq n} a_k \frac{\partial}{\partial y_k}\right) = \sum_{1 \leq k \leq j-1} a_k \frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{1 \leq k \leq n} a_k \frac{\partial f_j}{\partial y_k} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j \leq k \leq n} a_k \frac{\partial}{\partial x_{k+1}}$$

ここで、 $f_j = \sqrt{1 - \sum_{k=1}^n y_k^2}$ である。行列で表わせば

$$\left[\begin{array}{c|ccc} 1_{j-1} & & & 0 \\ \hline \partial_1 f_j & \cdots & \partial_n f_j & \\ \hline 0 & & & 1_{n-j+1} \end{array} \right], \quad 1_k \text{ はサイズ } k \text{ の単位行列}, \quad \partial_k f_j = \frac{\partial f_j}{\partial y_k}$$

である。上式より、微分が単射であることが分かる。また、 $p = (y_1, \dots, y_{j-1}, f_j, y_j, \dots, y_n)$ に注意して、任意の接ベクトル $v \in T_p S^n$ に対して、

$$(p, (di)_p(v)) = [y_1 \ \cdots \ y_{j-1} \ f_j \ y_j \ \cdots \ y_n] \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{j-1} \\ \sum a_k \partial_k f_j \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = 0$$

が成り立つことが確かめられ、像が p と直交するベクトル空間に含まれることが分かる。よって、微分の単射性より、像が p と直交するベクトル空間に一致することが分かる。

(2) 座標系を取って微分を計算してもよいが、次のように示すことができる。まず x_1 の微分 $dx_1: T_x \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}$ は、 $T_x \mathbf{R}^{n+1} \cong \mathbf{R}^{n+1}$ という同一視の下、ベクトル $[1 \ 0 \ \cdots \ 0]$ となる。このとき $df_p = d(x_1)_{i(p)} \circ di_p$ であるから、 $df_p = 0$ となる必要充分条件は、 $[1 \ 0 \ \cdots \ 0] (di_p(T_p M)) = 0$ であり、(1) の計算により、これは p (を \mathbf{R}^{n+1} の元と考えて、さらに内積によって横ベクトルと考えてもの) が、 $[1 \ 0 \ \cdots \ 0]$ と平行になることと同値である。これは $p = [\pm 1 \ 0 \ \cdots \ 0]$ となることに他ならない。最大値、最小値はいうまでもなく、1, -1 である。

略解 18. 問題 12 のように座標を取って計算すると、 df_p は単位行列の 2 倍となるから正しい。

略解 19. $S^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ とすると, $\pi(x_0, \dots, x_n) = [x_0 : \dots : x_n]$ である. 問題 1 のように S^n に座標 φ_i^\pm を入れ, また $\mathbf{R}P^n$ に非同次座標 ψ_i (すなわち $\psi_i([x_0 : \dots : x_n]) = (x_0/x_i, \dots, x_i/x_i, \dots, x_n/x_i)$) を入れると

$$\psi \circ \pi \circ (\varphi_i^\pm)^{-1}(y_1, \dots, y_n) = \pm \left(\frac{y_1}{\sqrt{1 - \sum_{\alpha=1}^n y_\alpha^2}}, \dots, \frac{y_n}{\sqrt{1 - \sum_{\alpha=1}^n y_\alpha^2}} \right)$$

となる. これは C^∞ 級写像である. 微分は

$$\frac{\partial(\text{第 } \alpha \text{ 成分})}{\partial y_\beta} = \pm (1 - |y|^2)^{-3/2} (y_\beta y_\alpha + (1 - |y|^2) \delta_{\alpha\beta})$$

一般に

$$\begin{pmatrix} y_1 y_1 & y_1 y_2 & \dots & y_1 y_n \\ y_2 y_1 & y_2 y_2 & \dots & y_2 y_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ y_n y_1 & y_n y_2 & \dots & y_n y_n \end{pmatrix} + c \times \text{単位行列}$$

の行列式が, $c^n + c^{n-1}|y|^2$ ($|y|^2 = \sum_{\alpha} y_\alpha^2$) で与えられることは容易に証明できる. 今の場合, $c = 1 - |y|^2$ であるから 行列式は $(1 - |y|^2)^{n-1}$ であり, 特に 0 ではない. よって微分 $d\pi_p$ は同型である.

略解 20. 座標 $U_0 = \{x \neq 0\}$ では,

$$f([1 : y]) = [1 : a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \dots + a_0]$$

となり, 像も U_0 に入るが, $\varphi_0 \circ f \circ (\varphi_0)^{-1}$ の微分が消えるのは $a_n y^n + a_{n-1} y^{n-1} + \dots + a_0$ の微分が 0 になる点である. あとは $[0 : 1]$ で微分が消えているかどうか調べればよい.

$$f([x : 1]) = [x^n : a_n + a_{n-1} x + \dots + a_0 x^n]$$

である. $a_n \neq 0$ なので x が十分小さければ, $a_n + a_{n-1} x + \dots + a_0 x^n \neq 0$ となり, 座標 φ_1 を使って $\frac{x^n}{a_n + a_{n-1} x + \dots + a_0 x^n}$ の微分を計算すると, $n \neq 1$ であれば, $x = 0$ で微分が消えている. したがって $p = [0 : 1]$ でも $df_p = 0$ である. $n = 1$ であれば, $x = 0$ では微分は消えていない. また, その場合は U_0 でも微分は消えていない.