略解 21. 略

略解 22. 略 ([坪井, 定理 1.2.3] 参照)

略解 23. 略 ([坪井, 定理 2.2.1] 参照)

略解 24. $f(z) = u(z) + iv(z)$ (u, v は実数値関数), $z = x + iy$ (x, y は実数) と表わし, f のヤコビ行列を計算すると

$$df_z = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

であるから,

$$\det df_z = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}$$

である. コーシー・リーマン方程式から, これは

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

に等しい. よって, $\det f_z = 0$ となる必要十分条件は $f'(z) = 0$ である.

略解 25. $\mathbf{R}P^2$ の座標として, $\pi\colon S^2 \to \mathbf{R}P^2$ を利用して, S^2 の開集合 V で, π を制限すると全単射になるものを取り, $U = \pi(V)$ として, φ を π^{-1} に S^2 の座標を合成したものを取る. (どのように取るか, また非同次座標との座標変換が C^∞ 級であることの証明は略す.) このようにすれば, $\widetilde{f}$ が C^∞ 級であること (これの証明は略) から f も C^∞ 級である.

$\widetilde{f}$ の微分を計算すると

$$\begin{pmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \\ 2x & 4y & 6z \end{pmatrix}$$

を接空間 $T_{(x,y,z)}S^2 = \{(X, Y, Z) \mid xX + yY + zZ = 0\}$ に制限したものである. これが単射であることは容易にチェックできる. $\pi\colon S^2 \to \mathbf{R}P^2$ は接空間の間の同型を与えるから (これは上のように座標を入れておけば明らかである), f は, はめ込みである. f が単射であることの証明は, $\widetilde{f}$ の行き先を調べればすぐ分かる. $\mathbf{R}P^2$ はコンパクト, $\mathbf{R}^4$ はハウスドルフであるから, f は像への同相写像である.

略解 26. (1) f_U は $\mathbf{C}^{n+1}$ の連続写像の制限になっているので明らかに連続である. よって f_U が C^∞ 級であることを示すには, **問題 1**(または**問題 2**) の S^{2n+1} の座標を使って, f_U を $\mathbf{R}^{2n+1}$ の開集合の間の写像にうつしてそれが C^∞ 級であることを確かめればよい. 詳細は略す. U の逆行列もユニタリ行列だから, f_U は C^∞ 級の逆写像 $f_{U^{-1}}$ を持つ. よって f_U は C^∞ 級微分同相写像である.

別解として, 次の一般的な事実を使う方法もある.

「$g : L \to M$, $h : M \to N$ が C^∞ 級多様体の間の写像で, h は埋め込みであるとする. このとき, $h \circ g$ が C^∞ 級ならば g も C^∞ 級である.」

この事実はは逆関数定理 (またはその系) を使えば証明できる. 実際, 定義から h は像への同相写像だから g は連続で, $p \in L$ とすると逆関数定理の系から, M の $g(p)$ のまわりの座標 (U, φ) と N の $h \circ g(p)$ のまわりの座標 (V, ψ) が存在して, $h(U) \subset V$ かつ

$$\psi \circ h \circ \varphi^{-1}(x_1, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0) \qquad (x_1, \ldots, x_m) \in \varphi(U)$$

となる.($m = \dim M$ である.) L の p のまわりの座標近傍 (W, ϕ) を $g(W) \subset U$ となるようにとれば $\psi \circ h \circ g \circ \phi^{-1}$ が C^∞ 級であることから $\varphi \circ g \circ \phi^{-1}$ が C^∞ 級であることがわかり, g が C^∞ 級であることがわかる.

この事実を使えば, 包含写像 $i : S^{2n+1} \to \mathbf{C}^{n+1}$ は埋め込みだから, $i \circ f_U$ が C^∞ 級であることから f_U が C^∞ 級であることがわかる.

(2) g_U が well-defined であることをいうには, $z \in \mathbf{C}^{n+1} \backslash \{0\}$ ならば $Uz \in \mathbf{C}^{n+1} \backslash \{0\}$ であることと, $z, z' \in \mathbf{C}^{n+1} \backslash \{0\},\ z' = \lambda z\ \exists \lambda \in \mathbf{C} \backslash \{0\}$ ならば $Uz' = \lambda Uz$ であることを確かめればよいが, これは明らかである. また, 連続写像であることも明らか. よって, g_U が C^∞ 級写像であることは (1) と同様に座標をとってチェックすればよい. また, g_U は C^∞ 級の逆写像 $g_{U^{-1}}$ を持つから C^∞ 級微分同相写像である.

略解 27. $S^{2n+1} = \{(z_0, \ldots, z_n) \in \mathbf{C}^{n+1} \mid |z_0|^2 + \cdots + |z_n|^2 = 1\}$ とすると, $\pi(z_0, \ldots, z_n) = [z_0 : \cdots : z_n]$ である. すべての点で座標を取り, ヤコビ行列を計算して階数を計算すればよいが, 計算が複雑になる. そこで**問題 26** のユニタリ行列 U を用いて, $f_U \colon S^{2n+1} \to S^{2n+1}$, $g_U \colon \mathbf{C}P^n \to \mathbf{C}P^n$ を考える. このとき $g_U \circ \pi \circ f_U^{-1} = \pi$ に注意する. S^{2n+1} の任意の点が, ある U を取ることによって $p = (1, 0, \ldots, 0)$ に移すことができ, また f_U, g_U は微分同相写像であったから, p だけで微分を計算すればよい.

S^{2n+1} の開集合 U を $U = \{\pm \mathrm{Re}(z_0) > 0\}$ とおく. U 上の座標 φ を

$$\varphi^{-1}(y_0, z_1, \ldots, z_n) = (\sqrt{1 - \textstyle\sum_{i \geq 1} |z_i|^2 - y_0^2} + \sqrt{-1} y_0, z_1, \ldots, z_n) \qquad y_0 \in \mathbf{R}, z_i \in \mathbf{C}$$

のように定める. また $\mathbf{C}P^n$ の開集合 $U_0 = z_0 \neq 0$ に非同次座標 $\psi([z_0 : \cdots : z_n]) = (z_1/z_0, \ldots, z_n/z_0)$ を入れると

$$\psi \circ \pi \circ \varphi^{-1}(y_0, z_1, \ldots, z_n) = \frac{1}{\sqrt{1 - \sum_{i \geq 1} |z_i|^2 - y_0^2} + \sqrt{-1} y_0} (z_1, \ldots, z_n)$$

となる. これを $(s_1 + \sqrt{-1} t_1, \ldots, s_n + \sqrt{-1} t_n)$, また $z_i = x_i + \sqrt{-1} y_i\ (i \geq 1)$ とおいて, p すなわち $x_i = y_i = 0$ でヤコビ行列を求めると

$$\frac{\partial s_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}, \quad \frac{\partial s_i}{\partial y_j} = 0, \quad \frac{\partial t_i}{\partial x_j} = 0, \quad \frac{\partial t_i}{\partial y_j} = \delta_{ij}$$

となる. ($1 \leq i, j \leq n$ と y_0 がある.) これは単位行列に 0 を一列付け加えたもので, 全射である.

また $\pi^{-1}(q)$ は, 上と同様の議論により $q = [1 : 0 : \cdots : 0]$ のときに調べればよい. このとき $\pi^{-1}(q) = \{(z_0, 0, \ldots, 0) \mid |z_0|^2 = 1\}$ であるから, 明らかに S^1 と微分同相である.

略解 28. [坪井, 例題 4.4.7] 参照