略解 37. φ^- を南極からの直交射影とすると, **略解 3** により

$$\varphi^+ \circ (\varphi^-)^{-1}(y_1, \ldots, y_n) = (\frac{y_1}{|y|^2}, \ldots, \frac{y_n}{|y|^2}), \qquad |y|^2 = \sum y_\alpha^2$$

であった. この右辺を $(w_1, \ldots, w_n)$ とおくと,

$$\frac{\partial}{\partial y_\alpha} = \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial w_\beta}{\partial y_\alpha}\frac{\partial}{\partial w_\beta} = \sum_{\beta=1}^n \left(\frac{\delta_{\alpha\beta}}{|y|^2} - \frac{2y_\beta y_\alpha}{|y|^4}\right)\frac{\partial}{\partial w_\beta} = \sum_{\beta=1}^n \left(\delta_{\alpha\beta}|w|^2 - 2w_\beta w_\alpha\right)\frac{\partial}{\partial w_\beta}$$

となり, これは $w = 0$ まで滑らかになっていることを意味する. また, $w = 0$ ではこれは 0 になっているから, ベクトル場が消えているのは南極の一点である. また,

$$\sum_{\alpha=1}^n y_\alpha \frac{\partial}{\partial y_\alpha} = \sum_{\alpha=1}^n \left(y_\alpha |w|^2 - 2\sum_{\beta=1}^n 2y_\alpha w_\beta w_\alpha\right)\frac{\partial}{\partial w_\beta} = -\sum_{\beta=1}^n w_\beta \frac{\partial}{\partial w_\beta}$$

であり, これも $w = 0$ まで滑らかになっている.

注. n が偶数のとき, S^n 上のいかなるベクトル場 X も, それが 0 になる点の数 (しかるべき数え方をする) は 2 個になることがしられている. n が奇数のときは 0 個になる. (Poincaré-Hopf の定理)

略解 38. (1) $T^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ の座標は次のように取ることができる. 開集合 $V \subset \mathbf{R}^2$ であって, π の V への制限は全単射であり, $U = \pi(V)$ とするときに座標 $\varphi\colon U \to V$ は, π の逆写像である. この座標に π を制限すると, $\mathbf{R}^2$ 上のベクトル場 $\widetilde{X}$ と座標ベクトル場 $\partial/\partial x$ は同じである. (正確には $d\pi$ で写りあう.) 上のような座標二つに関する座標変換で, $\partial/\partial x$ がそれ自身にうつることは, (共通部分の連結集合上で) 座標変換が定数を足していることに他ならないことから分かる.

もしくは, T^2 上の C^∞ 級関数は, $\mathbf{R}^2$ 上の C^∞ 級関数で, $f(x+m, y+n) = f(x, y)$ $((m, n) \in \mathbf{Z}^2)$ を満たすものであることに注意して, $\frac{\partial}{\partial x}f$ が再びこの性質を満たすことからもチェックできる.

(2) $F_t(x, y) = (x + t, y)$ とおくと、$\frac{dF}{dt}(x)\Big|_{t=0} = X$ となるので、F_t が対応する 1 パラメータ変換群である。

注. 上と同じく T^2 上のどんなベクトル場も 0 となる点の数は 0 個である.

略解 39. 略

略解 40. 任意の C^∞ 級関数 f に左辺を作用させてみれば, 0 であることが分かる.

略解 41. (1) N 上の C^∞ 級関数と M の点 p に対して

$$(D_X \circ F^*g)(p) = X_p(g \circ F) = dF_p(X_p)g, \qquad Y_{F(p)}g = (D_Y g)(F(p)) = (F^* \circ D_Y g)(p)$$

が成り立つ. したがって $D_X \circ F^* = F^* \circ D_Y$ と $dF_p(X_p) = Y_{F(p)}$ は同値である.

(2) リーブラケットの定義により $D_{[X_1,X_2]} = D_{X_1} \circ D_{X_2} - D_{X_2} \circ D_{X_1}$ が成り立つから,

$$\begin{aligned} &D_{[X_1,X_2]} \circ F^* = (D_{X_1} \circ D_{X_2} - D_{X_2} \circ D_{X_1}) \circ F^* = D_{X_1} \circ F^* \circ D_{Y_2} - D_{X_2} \circ F^* \circ D_{Y_1} \\ &= F^* \left(D_{Y_1} \circ D_{Y_2} - D_{Y_2} \circ D_{Y_1}\right) = F^* \circ D_{[Y_1,Y_2]} \end{aligned}$$

となって結論が従う.

略解 42. (1) 座標をとって C^∞ 級であることを確かめればよいが, φ の方は $F^{-1}\circ\varphi\colon \mathbf{R}\cong M\to M\cong\mathbf{R}$ が C^∞ 級であることを意味する．$F^{-1}\circ\varphi(x)=x^3$ だから, C^∞ 級は正しい. 一方, φ^{-1} の方は, $\varphi^{-1}\circ F\colon \mathbf{R}\cong M\to M\cong\mathbf{R}$ であるが, これは $x\mapsto x^{1/3}$ だから C^∞ 級ではない.

(2) 上で定めた N の座標を y とする．つまり $\varphi(x)$ を座標 y で表すと, $y=x^3$ である．したがって M, N という多様体の代りに, $\varphi\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$; $\varphi(x)=x^3$ を考えて, X と φ-関係にあるベクトル場 Y がないことをチェックすればよい．$\varphi'(x)=3x^2$ であるから, $d\varphi_x(\frac{\partial}{\partial x})=\frac{dy}{dx}\frac{\partial}{\partial y}=3x^2\frac{\partial}{\partial y}$ である．ところが, $3x^2=3y^{2/3}$ は y の C^∞ 級関数ではない．よって, ベクトル場 Y は C^∞ 級にはとれない.