**略解 48.** $U_\pm = S^n \setminus \{(0,\cdots,0,\pm1)\}$ とおくと, $U_+$ 上で, **略解 2** でした様に, $x_1$ を $y_1,\ldots,y_n$ で表すと,

$$\begin{aligned}\alpha &= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_1}{\partial y_i} dy_i \\ &= \frac{2}{(1+y_1^2+\cdots+y_n^2)^2}\{(1-y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)dy_1 - 2\sum_{i=2}^{n} y_1 y_i dy_i\}\end{aligned}$$

となる. $U_-$ 上でも同じ形の式になる.

**略解 49.** (1) **略解 38** と同様に $S^1$ の座標近傍系 $\{(U_1,\varphi_1),(U_2,\varphi_2)\}$ を $\varphi_i$ が $\pi$ の局所的な逆となるようにとる. $\varphi_i$ に対応する一次微分形式を $dx_i$ とかく. 明らかに $\frac{d(\varphi_2\circ(\varphi_1)^{-1})}{dx_1} = 1$ となるから, すべての $p \in U_1 \cap U_2$ に対して $(dx_1)_p = (dx_2)_p$ となり, $dx_1$ と $dx_2$ を張り合わせて $S^1$ 上の微分形式を作ることができる. これが $\alpha$ の条件を満たすことは明らかである. また, 一意性は $\pi$ が全射であること, $\mathbf{R}$ の各点で接空間の同型を誘導することからわかる.

(2) 略

(3) $df = dx$ となる $C^\infty$ 関数 $f : S^1 \to \mathbf{R}$ が存在したと仮定する. このとき $d(f\circ\pi) = dx$ となり, これは $f\circ\pi(x) = x + c$ ($c$ は定数) となることを意味するが, あきらかにこのような $f$ は存在しない. よって矛盾である.

**略解 50.** (1) $\rho(p) = 1$ かつ $\rho|_{M\setminus W} = 0$ となる $C^\infty$ 級関数 $\rho$ をとれば、$\rho X$ は恒等的に 0 であり、このとき $\alpha(\rho X)$ が恒等的に 0 になることは容易に分かる。さらに、

$$\alpha(X)(p) = (\rho\cdot\alpha(X))(p) = \alpha(\rho X)(p) = 0$$

となるのでよい.

(2) $V \in T_pM$ に対して, $M$ 上のベクトル場 $\widetilde{V}$ で $\widetilde{V}_p = V$ となるものをとる. (このような $\widetilde{V}$ を構成するには, 局所的には座標をとって $\mathbf{R}^n$ にうつしてつくり, これを $M$ 全体のベクトル場に拡張すればよい.) $\alpha_p(V) := \alpha(\widetilde{V})(p)$ とおく. この定義が $\widetilde{V}$ のとり方によらないことは次のようにして示せる. $\tilde{V}_p = 0$ ならば $\alpha(\widetilde{V})(p) = 0$ であることをいえば十分である. $p$ のまわりの座標近傍 $(x_1,\ldots,x_n)$ をとり, ベクトル場 $\frac{\partial}{\partial x_i}$ (の十分小さい近傍への制限) の $M$ 全体への拡張を $X_i$ とかくと, $p$ の十分小さい近傍 $W_1$ と $M$ 上の $C^\infty$ 級関数 $f_i$ で, $\widetilde{V}|_{W_1} = (\sum_{i=1}^n f_i X_i)|_{W_1}$ となるものが存在し, $f_i(p) = 0$ となる. (1) から, $\alpha(\widetilde{V} - \sum_{i=1}^n f_i X_i)(p) = 0$ となることがわかり, 従って,

$$\alpha(\widetilde{V})(p) = \alpha(\sum_{i=1}^{n} f_i X_i)(p) = \sum_{i=1}^{n} f_i(p)\alpha(X_i)(p) = 0$$

となり, $\alpha_p(V)$ は well-defined である. 写像 $T_pM \ni V \mapsto \alpha_p(V) \in \mathbf{R}$ が線形であることは明らかで, 一次形式 $M \ni p \mapsto \alpha_p \in T_pM^*$ が微分可能であることは上で定義した $X_i$ を使えばわかる. $(\alpha(X))(p) = \alpha_p(X_p)$ となることはつくり方から明らか.

**略解 51.** (1) 一般に, $C^\infty$ 級関数 $f, g$ とベクトル場 $X, Y$ に対して, $[fX, gY] = fg[X,Y] + f(Xg)Y - g(Yf)$ が成り立つ. (これは左辺を微分作用素だと思って $C^\infty$ 級関数に作用させて具体的に計算すればわかる. ) この等式を使えば, $(L_X\alpha)(fY + gZ) = f(L_X\alpha)(Y) +$

$g(L_X\alpha)(Z)$ が成り立つことがわかるので、**問題 50** より, $L_X\alpha$ が一次微分形式であることがわかる.

(2)$Y$ を $M$ 上のベクトル場とする.

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\frac{(\varphi_t^*\alpha)_p-\alpha_p}{t}(Y_p) &= \lim_{t\to 0}\frac{(\varphi_t^*\alpha)(Y)(p)-\alpha(Y)(p)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{(\varphi_t^*(\alpha(\varphi_{t*}Y))(p)-\varphi_t^*(\alpha Y)(p)+\varphi_t^*(\alpha Y)(p)-\alpha(Y)(p)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0}\varphi_t^*\left(\frac{\alpha(\varphi_{t*}Y)(p)-\alpha Y(p)}{t}\right)+\lim_{t\to 0}\frac{\varphi_t^*(\alpha Y)(p)-\alpha Y(p)}{t} \\
&= -\alpha([X,Y])(p)+X(\alpha(Y))(p)
\end{aligned}$$

となる. ここで, 二つめの変形には $(\varphi_t^*\alpha)(Y)=\varphi_t^*(\alpha(\varphi_{t*}Y))$ (これは容易に確かめられる) を, 五つめの変形には $(t,p)\mapsto\alpha(\varphi_{t*}Y)(p)$ が $(t,p)$ の $C^\infty$ 級関数であること, $L_X(Y)=[X,Y]$ と $L_X(\alpha Y)=X(\alpha Y)$(授業でしめした命題) を使った. すべての $M$ 上のベクトル場 $Y$ に対してこの等式が成り立つので,

$$(L_X\alpha)(Y)=X(\alpha(Y))-\alpha([X,Y])$$

が成り立つ.

**略解 52.** 左辺を逐次積分で表すと

$$\int_D\left(-\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial g}{\partial x}\right)dxdy=-\int_a^b dx\int_c^d dy\frac{\partial f}{\partial y}+\int_c^d dy\int_a^b dx\frac{\partial g}{\partial x}$$

となる。部分積分を実行すると

$$-\int_a^b dx(f(x,d)-f(x,c))+\int_c^d dy(g(b,y)-g(a,y))$$

である。これは右辺に他ならない。

**略解 53.** (1) 仮定から, $f=\frac{\partial\Phi}{\partial x}$, $g=\frac{\partial\Phi}{\partial y}$ となる. $c(t)=(c_1(t),c_2(t))$ とかくと,

$$\begin{aligned}
\int_c\alpha &= \int_0^1\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}(c(t))\frac{dc_1}{dt}(t)+\frac{\partial\Phi}{\partial y}(c(t))\frac{dc_2}{dt}(t)\right)dt \\
&= \int_0^1\frac{d(\Phi\circ c)}{dt}(t)dt \\
&= \Phi\circ c(1)-\Phi\circ c(0)=\Phi(Q)-\Phi(P)
\end{aligned}$$

(2) $U$ が (弧状) 連結と仮定して示せばよい. $U$ の点 $P_0$ を一つ固定する. $P\in U$ に対して, $c(0)=P_0$ かつ $c(1)=P$ なる区分的に $C^\infty$ 級な曲線 $c:[0,1]\to U$ をとり, $\Phi(P):=\int_c\alpha$ と定める. 仮定から, これは well-defined である. $\Phi$ が $C^\infty$ 級で $d\Phi=\alpha$ となることをいうためには, 任意の $P\in U$ に対して,

$$\lim_{Q\to P}\frac{|\Phi(Q)-(\Phi(P)+f(P)(q_1-p_1)+g(P)(q_2-p_2))|}{\sqrt{(q_1-p_1)^2+(q_2-p_2)^2}}=0$$

となることをいえばよい．$(P=(p_1,p_2),Q=(q_1,q_2))$ $\epsilon>0$ とする．$\delta>0$ を十分小さくとって, $B_\delta(P)\subseteq U$、$Q\in B_\delta(P)$ ならば, $|f(Q)-f(P)|<\epsilon$ かつ $|g(Q)-g(P)|<\epsilon$ となるようにする．このとき $c:[0,1]\to U$ を $c(t)=P+t(Q-P)$ と定めると,

$$
\begin{aligned}
&|\Phi(Q)-(\Phi(P)+f(P)(q_1-p_1)+g(P)(q_2-p_2))|\\
=&|\int_c \alpha-(f(P)(q_1-p_1)+g(P)(q_2-p_2))|\\
\leq&\int_0^1(|f(P+t(Q-P))-f(P)||q_1-p_1|+|g(P+t(Q-P))-g(P)||q_2-p_2|)dt\\
\leq&2\epsilon\sqrt{(q_1-p_1)^2+(q_2-p_2)^2}
\end{aligned}
$$

となり, 上の主張が成り立つことがわかる．