幾何学I演習問題

担当: 中島 啓　TA: 佐々木建祀郎, 佐藤敬志, 中西克典

2012年4月11日(水)

問題 1. n 次元球面 $S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$ が C^∞ 級微分可能多様体であることを, 授業に従って $2(n+1)$ 個の座標系を具体的に与えることで示せ.

問題 2. n 次元球面 $S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$ の北極と南極からの立体射影 $\varphi^+ \colon S^n \setminus \{(0, \ldots, 0, 1)\} \to \mathbf{R}^n$, $\varphi^- \colon S^n \setminus \{(0, \ldots, 0, -1)\} \to \mathbf{R}^n$

$$\varphi^\pm(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (\frac{x_1}{1 \mp x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1 \mp x_{n+1}}),$$

を考える. $\varphi^\pm$ は S^n の座標系を与えることを示せ.

また, **問題 1** の座標との座標変換が微分同相であることもチェックせよ.

問題 3. $\mathbf{R}^2$ 内の正方形 $[0,1] \times [0,1]$ の向かい合う辺を, 授業で説明したように貼り合わせてできるクラインの壷 M に, C^∞ 級多様体の構造を定めよ.

問題 4. (坪井 問題 3.3.7) 複素射影空間 $\mathbf{C}P^n$ を, $\mathbf{C}^{n+1}$ 内の複素1次元部分空間の全体のなす集合として定義する. $\mathbf{C}P^n$ に適当な位相と, 座標近傍系を与えて, C^∞ 級多様体の構造を定めよ.

問題 5. $\varphi \colon R \to \mathbf{R}$ を $\varphi(x) = x^3$ で定義する. このとき $(\mathbf{R}, \varphi)$ は, $\mathbf{R}$ の座標近傍になる. このとき $(\mathbf{R}, \varphi)$ だけからなる座標近傍系の族を考えて, $\mathbf{R}$ に C^∞ 級多様体の構造を入れる.

(1) $\mathbf{R}$ が, C^∞ 級多様体になっていることを確かめよ.

(2) $\psi \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を $\psi(x) = x$ で定めるとき, $(\mathbf{R}, \varphi)$ と $(\mathbf{R}, \psi)$ の二つを合わせたものは, C^∞ 級多様体になっていないことを確かめよ.

問題 6. $X = Y = \mathbf{R}$ とし, M を X と Y を負の実数 (0 は含めない) のところで貼り合わせてできる集合とする. すなわち,

$$M = \{(x,t) \in \mathbf{R} \times \{0,1\}\}/\sim, \qquad (x,0) \sim (x,1) \text{ if } x < 0.$$

M には商位相を入れる. すなわち $\pi \colon \mathbf{R} \times \{0,1\} \to M$ を自然な射影とするときに, $\pi^{-1}(U)$ が開集合であるときに, U を開集合と定義する.

(1) M はハウスドルフ空間ではない.

(2) U_0 を $\{(x,0) \mid x \in \mathbf{R}\}$ の π による像とし, U_1 を $\{(x,1) \mid x \in \mathbf{R}\}$ の π による像とする. $\varphi_0 \colon U_0 \to \mathbf{R}$, $\varphi_1 \colon U_1 \to \mathbf{R}$ を $(x,0) \mapsto x$, $(x,1) \mapsto x$ で定義する. これが well-defined であり, 同相写像であることをチェックせよ.

(3) $\varphi_0 \cap \varphi_1^{-1}$ が, $\varphi_1(U_0 \cap U_1)$ で C^∞ 級写像であることをチェックせよ.

したがって, M はハウスドルフ公理以外の多様体の定義を満す.