幾何学I演習問題

担当: 中島 啓　TA: 佐々木建祀郎, 佐藤敬志, 中西克典

2012年7月11日(水)

演習問題の略解は

`http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~nakajima/Lecture/12_Kika1.html`

を参照のこと.

来週の授業では演習問題は配布しないので、今回が最終の演習問題である。

問題 71. (2007年度幾何学I試験問題) M を n 次元のコンパクトな C^∞ 級多様体とし、$f\colon M \to \mathbf{R}^n$ を C^∞ 級写像であるとする。($\dim M = \dim \mathbf{R}^n$ に注意せよ。) f は、はめ込みにはならないこと、すなわち、f の微分 $df_x\colon T_xM \to T_{f(x)}\mathbf{R}^n$ が、M 上のすべての点 x において同型であることはありえないことを示せ。

問題 72. (2007年度幾何学I試験問題) $\mathbf{C}P^1$ の非同次座標 $\varphi\colon U_0 = \{[z_0 : z_1] \mid z_0 \neq 0\} \to \mathbf{C}$; $[z_0 : z_1] \mapsto z_1/z_0$ を考える。$\mathbf{C}$ 上で $z = x + iy$ と表わしたときに、その上の二次微分形式を

$$\omega = \frac{dx \wedge dy}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

によって定義する。

(1) ω は、$\mathbf{C}P^1$ 上の二次微分形式に拡張されることを証明せよ。

(2) $\mathbf{C}P^1$ には、非同次座標から向きが入ることをチェックせよ。(**問題 68** の特別な場合) ただし、$\mathbf{C}$ には**問題 68** のように (x, y) によって向きを入れる。

(3) (1) で拡張された ω に対して

$$\int_{\mathbf{C}P^1} \omega$$

を計算せよ。

ヒント: まず、$\int_{\mathbf{C}} \omega$ に等しいことを証明せよ。

問題 73. (代数学の基本定理) $n \geq 1$ とし, $f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$ を n 次多項式とし, $f\colon \mathbf{C} \cong \mathbf{R}^2 \to \mathbf{C} \cong \mathbf{R}^2$ という C^∞ 級写像とみなす. $R > 0$ に対して, $D_R = \{z \in \mathbf{C} \mid |c| \leq R\}$ で原点を中心とする半径 R の円周 (の境界と内部) とする. ω を**問題 62** の $\mathbf{C} \setminus \{0\}$ 上の 1 次微分形式とする.

(1) 十分大きな R を取ると (特に $f(\partial D_R)$ は原点を通らない),

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D_R} f^* \omega = n$$

となることを示せ. **ヒント**: $f_0(z) = z^n$ とし, f と f_0 をつなげてみよ.

(2) 上のような大きな R に対して $f(z) = 0$ が, D_R で零点を持たないと仮定するとき, Stokes の定理を用いて

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\partial D_R} f^*\omega = 0$$

となることを示し, このようなことがあり得ないことを証明せよ.

問題 74. n 次元 C^∞ 級多様体 M の各点における接空間 T_xM に、(正定値な) 内積 $g_x\colon T_xM\times T_xM \to \mathbf{R}$ が定められ、座標ベクトル場 $\partial/\partial x_i$ を代入すると、$g_x((\partial/\partial x_i)_x, (\partial/\partial x_j)_x)$ が x について (局所的な) C^∞ 級関数になる、という意味で x について C^∞ 級に依存しているとする。(M 上の**リーマン計量**とよばれる。)

(1) 各点 x ごとに、その近傍 U 上で定義されたベクトル場で $e_1, \ldots, e_n$ であって、各点 $y \in U$ において $e_{1,y}, \ldots, e_{n,y}$ が、g_y に関する T_yM の正規直交基底になっているものが取れることを証明せよ。

(2) 各点 y ごとに $e_{1,y}, \ldots, e_{n,y}$ の双対基底 $\theta_{1,y}, \ldots, \theta_{n,y}$ を取る。これが正規直交基底になるように T_y^*M に内積を入れる。この内積は、最初の基底 $e_{1,y}, \ldots, e_{n,y}$ の取り方には依らず、g_y だけで決まることを示せ。

(3) 同様に、$\bigwedge^k T_y^*M$ に、$\{\theta_{i_1,y}\wedge\cdots\wedge\theta_{i_k,y} \mid i_1 < \cdots < i_k\}$ が正規直交基底になるように内積を入れる。この内積が、最初の基底 $e_{1,y}, \ldots, e_{n,y}$ の取り方には依らず、g_y だけで決まることを示せ。

(4)

$$\omega_y = \theta_{1,y}\wedge\cdots\wedge\theta_{n,y}$$

を考える。ω_y は、符号を除いて $e_{1,y}, \ldots, e_{n,y}$ の取り方には依存しないで決まることを証明せよ。

(5) さらに M は向きづけられているとし、向きに適合した座標系の定める座標ベクトル場が定める T_yM の基底との変換行列の行列式が正になるように $e_{1,y}, \ldots, e_{n,y}$ を取ると約束する。すると (2) の符号の不定性が消えて、ω_y は g_y と向きだけで決まることを示せ。さらに、M 上で C^∞ 級な n 次微分形式を定めることを示せ。(これを向きのついたリーマン多様体の**体積要素**という。)

問題 75. (1) 半径 1 の $(n-1)$ 次元球面 S^{n-1} を考える。その接空間 T_xS^{n-1} を $\mathbf{R}^n$ の中の x に直交するベクトルの全体と同一視し、$\mathbf{R}^n$ の自然な内積の制限として内積を定め、リーマン計量とする。このとき S^{n-1} に適当な向きを入れて体積要素 ω を考える。$\mathbf{R}^n$ の各点 x において、$X_x = x \in \mathbf{R}^n = T_x\mathbf{R}^n$ として、$\mathbf{R}^n$ 上のベクトル場 X を定義する。このとき $\mathbf{R}^n$ 上の $(n-1)$ 次微分形式 $i(X)dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n$ を S^{n-1} に、包含写像によって引き戻したものが体積要素になることを示せ。

(2) より一般に、向きのついた境界つき多様体 M を考え、M の各接空間 T_xM には内積がはいっているものとし、境界 ∂M の接空間にはその制限としての内積を入れる。M の体積要素を ω_M、∂M の体積要素を $\omega_{\partial M}$ で表わす。

∂M の法ベクトル場 N を ∂M の近傍に拡張したとき、$i(V)\omega_M$ を ∂M に引き戻したものが $\omega_{\partial M}$ になることを示せ。ただし、法ベクトル場は外向きと内向きの二通りがあり、その選び方に応じて ∂M の向きを選ぶ必要があるので、それも指定すること。

問題 76. 球面 S^{n-1} の体積を上の問題で定めた体積要素 $\omega_{S^{n-1}}$ を用いて

$$\int_{S^{n-1}} \omega_{S^{n-1}}$$

によって定義し、球 $B^n = \{x \in \mathbf{R}^n \mid |x| \leq 1\}$ の体積を

$$\int_{B^n} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

によって定義する。S^{n-1} の体積を B^n の体積を用いて表わせ。

問題 77. 下図のような領域の境界 C に反時計回りの向きを入れ、$\mathbf{R}^2$ の計量の制限として、接空間に内積を入れて体積要素 ω_C を定める。このとき $\int_C \omega_C$ を C の**長さ**という。もともとの領域が半径 1 の円板を中に含んでいるとき、C の長さが 2π よりも大きいことを証明せよ。

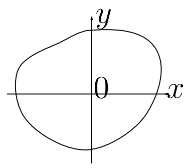

図 1: 原点を含む領域

問題 78. **問題 52** のように $\omega_2 = F_1 dy \wedge dz + F_2 dz \wedge dx + F_3 dx \wedge dy$ を考える。M を $\mathbf{R}^3$ 内のコンパクトな領域で、境界 ∂M は 2 次元の C^∞ 級多様体になっているものを考える。$i \colon \partial M \to \mathbf{R}^3$ を埋め込み写像とする。

(1) ∂M に入る自然な向きと、$\mathbf{R}^3$ の計量からの制限によるリーマン計量によって、体積要素 $\omega_{\partial M}$ を定義する。これを dA で表わす。このとき、$i^*\omega_2 = (F, N)dA$ を示せ。ただし、N は、∂M の外向き法線ベクトルで、これを (N_1, N_2, N_3) と成分表示したとき、$(F, N) = F_1 N_1 + F_2 N_2 + F_3 N_3$ と定める。

(2) 古典的なダイバージェンス定理

$$\int_M \operatorname{div} F dxdydz = \int_{\partial M} (F, N) dA$$

を、ストークスの定理から導け。

問題 79. (アルキメデスの原理) 水に浮かんでいる物体 D を考える. (簡単のため, 平面的に考える.) 下図のように水面が $y = 0$ となるように座標を取る. このとき, D の境界の点 (x, y) において, D は水から深さに比例している浮力を受け, その方向は境界の法線方向である. すなわち,

$$\overrightarrow{F}(x, y) = y \overrightarrow{n}(x, y)$$

を受ける. 但し $\overrightarrow{n}(x, y)$ は, (x, y) における D の境界の外向き法線ベクトルである. このとき, D 全体が水から受ける浮力は $\overrightarrow{F}$ を D の境界のうちの水の下にある部分 C で積分した値

$$\int_C \overrightarrow{F}(x, y) ds$$

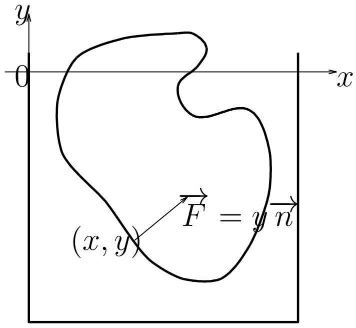

図 2: 水に浮かぶ物体

に等しい. 但し, s は C の弧長パラメータである. このとき, D 全体で受ける浮力が y 軸の正の方向で, その大きさが, D の水面下にある領域の面積に等しいことを証明せよ.