幾何学I演習問題

担当: 中島 啓　TA: 佐々木建祀郎, 佐藤敬志, 中西克典

2012年5月9日(水)

演習問題の略解は
`http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~nakajima/Lecture/12_Kika1.html`
を参照のこと.

復習 21. 行列 A は, $m \times n$ 行列とする. (ベクトルをたてベクトルと思って, $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ の線形写像と見なせる.)

(1) $m \geq n$ で, $A\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ は単射であるとする. (A の階数が n である.) このとき, $m \times m$ の正則行列 P を取って $PA = \begin{bmatrix} 1_n \\ 0 \end{bmatrix}$ と変形することができることを示せ. ただし, 1_n は, サイズ n の単位行列で, 0 は $(m-n) \times n$ のサイズの 0 行列である.

(2) $m \leq n$ で, $A\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ は単射であるとする. (A の階数が m である.) このとき, $n \times n$ の正則行列 Q を取って $AQ = \begin{bmatrix} 1_m & 0 \end{bmatrix}$ と変形することができることを示せ. ただし, 1_m は, サイズ m の単位行列で, 0 は $m \times (n-m)$ のサイズの 0 行列である.

復習 22. ユークリッド空間の開集合の間の C^∞ 級写像に関する陰関数定理を正確に書き, またその証明を与えよ.

復習 23. $0 \in U_1 \times U_2 \subset \mathbf{R}^{m+n}$ を, 原点を含む $\mathbf{R}^{m+n}$ 内の開集合とし, $F\colon U_1 \times U_2 \to \mathbf{R}^n$ を, $F(0) = 0$ を満す C^∞ 級写像として, $dF_0 = \begin{bmatrix} 1_n & 0 \end{bmatrix}$ とする. このとき, 開集合 $(0,0) \in W_1 \times W_2 \subset U_1 \times U_2$, と C^∞ 級写像 $g\colon W_1 \to W_2$ が存在して, 「$(x,y) \in W_1 \times W_2$ に対して, $F(x,y) = 0$ となる必要十分条件が, $y = g(x)$ である」が成り立つようにできることを証明せよ.

問題 24. $f\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ を正則関数とする. $\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$ と思って, $z \in \mathbf{C}$ における f のヤコビ行列 df_z を計算したときに, $\det df_z \neq 0$ となる必要十分条件は, $f'(z) \neq 0$ であることを証明せよ.

問題 25. $\widetilde{f}\colon S^2 \to \mathbf{R}^4$ を $f(x,y,z) = (yz, xz, xy, x^2 + 2y^2 + 3z^2)$ によって定義する. $\mathbf{R}P^2 = S^2/\sim$ (ただし $(x,y,z) \sim -(x,y,z)$ とする) に従って, $\widetilde{f}$ は写像 $f\colon \mathbf{R}P^2 \to \mathbf{R}^4$ を誘導する. f が C^∞ 級であること, 埋め込みであることを証明せよ.

問題 26. (1) $(n+1)\times(n+1)$ のユニタリ行列 $U = (u_{ij})_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}}$ を取る. このとき, $f_U\colon S^{2n+1} \to S^{2n+1}$

$$(z_0, z_1, \ldots, z_n) \longmapsto (\sum_j u_{0j} z_j, \sum_j u_{1j} z_j, \ldots, \sum_j u_{nj} z_j)$$

で定める. C^∞ 級微分同相写像であることを示せ.

(2) 同様に $g_U\colon \mathbf{C}P^n \to \mathbf{C}P^n$ を

$$[z_0 : z_1 : \cdots : z_n] \longmapsto [\sum_j u_{0j} z_j : \sum_j u_{1j} z_j : \cdots : \sum_j u_{nj} z_j]$$

で定める. well-defined であること, C^∞ 級微分同相写像であることを示せ.

問題 27. **問題 12** の写像 $\pi\colon S^{2n+1} \to \mathbf{C}P^n$ について,

(1) その微分 $df_p\colon T_p S^{2n+1} \to T_{\pi(p)}\mathbf{C}P^n$ は全ての p について全射であることを示せ.

(2) すべての $q \in \mathbf{C}P^n$ について $\pi^{-1}(q)$ が S^1 と微分同相であることを示せ.

問題 28. C^∞ 級多様体 X の部分多様体 Y, Z が、**横断的に交わる**とは、すべての $x \in Y \cap Z$ について $T_xY + T_xZ = T_xX$ が成立することである。このとき $Y \cap Z$ も X の部分多様体であることを示せ。