幾何学I演習問題

担当: 中島 啓　TA: 佐々木建祀郎, 佐藤敬志, 中西克典

2012年5月23日(水)

演習問題の略解は
`http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~nakajima/Lecture/12_Kika1.html`
を参照のこと.

問題 29. (1) $f\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ を $f(x,y) = xy$ で定義する.
(a) f の微分 (ヤコビ行列)df を計算し, 臨界点の集合 C_f , すなわち $df = 0$ となる点 (x,y) の集合と, 臨界値の集合 $f(C_f)$ を求めよ.
(b) $c \in \mathbf{R}$ に対して $f^{-1}(c)$ は, 多様体になるか？
(2) $f\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ を $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ と定め, 上と同様の考察を行え.

問題 30. $m \le n$ のとき, $\mathbf{R}^{m+1} \subset \mathbf{R}^{n+1}$ から誘導される写像 $S^m \to S^n$ によって, S^m は S^n の部分多様体になることを証明せよ.

問題 31. L は M の部分多様体, M は N の部分多様体であるとする. L は N の部分多様体であることを示せ.

問題 32. $f\colon M \to N$ を C^∞ 級多様体のあいだの C^∞ 級写像とする. $\Gamma_f\colon M \to M \times N$ を $\Gamma_f(x) = (x, f(x))$ によって定義する. Γ_f によって M は $M \times N$ の部分多様体となることを証明せよ.

問題 33. **問題 24** を多変数に増やす.
$f\colon \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^m$ は (全) 微分可能で, $\mathbf{C}^n$ の各変数 $z_1, \dots, z_n$ について正則写像であるとする. このとき, 点 $p \in \mathbf{C}^n$ における複素の意味でのヤコビ行列を

$$\partial f_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial z_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial z_n} \end{bmatrix}$$

によって定める.
このとき f を $\mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2m}$ という写像と思ってヤコビ行列を df_p とするとき, $2m$ 次の**複素**正則行列 P と $2n$ 次の**複素**正則行列 Q をうまく取って

$$P df_p Q^{-1} = \begin{bmatrix} \partial f_p & 0 \\ 0 & \overline{\partial f_p} \end{bmatrix}$$

と変形せよ. ただし, $\overline{\partial f_p}$ は ∂f_p の各成分の共役複素数をとってできる行列である.

問題 34. $n \geq 1$ とする.

実射影空間 $\mathbf{R}P^n$ の部分集合 $M = \{[x_0 : \cdots : x_n] \in \mathbf{R}P^n \mid x_0^d + \cdots + x_n^d = 0\}$ を考える. ただし, d は奇数とする. M が $\mathbf{R}P^n$ の部分多様体であることを証明せよ. (M が空集合でないことも注意すること.)

(2) 複素射影空間 $\mathbf{C}P^n$ 内の部分集合 $M = \{[z_0 : \cdots : z_n] \in \mathbf{C}P^n \mid z_0^d + \cdots + z_n^d = 0\}$ について同様のことを示せ. 今度は, d は 1 以上の整数とする.

ヒント: 上の**問題 33** を使え.

問題 35. (2003 年度幾何学 I 試験問題) n 次元射影空間 $\mathbf{R}P^n$ と $(n+1)$ 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^{n+1}$ の直積の部分集合

$$M = \{([x_0 : x_1 : \cdots : x_n], (y_0, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}P^n \times \mathbf{R}^{n+1} \mid x_i y_j = x_j y_i \quad (i, j = 0, \ldots, n)\}$$

を考える.

(1) M が $\mathbf{R}P^n \times \mathbf{R}^{n+1}$ の部分多様体であることを証明せよ. 何次元か?

(2) M から第二成分への射影を $f \colon M \to \mathbf{R}^{n+1}$ とする. f の臨界点をすべて求めよ.

問題 36. (2007 年度幾何学 I 試験問題) $n \times n$ 実行列の全体を $M(n, n; \mathbf{R})$ で表わし、$\mathbf{R}^{n^2}$ と同一視することで多様体の構造を入れる。また n 次単位行列を I_n で表わす。

$O(n)$ を n 次直交群とする。すなわち、$n \times n$ 実行列 g で、その転置行列 ${}^t g$ が、逆行列 g^{-1} になっているものの全体 $O(n) = \{g \in M(n, n; \mathbf{R}) \mid g\, {}^t g = I_n\}$ である。$O(n)$ が $M(n, n; \mathbf{R})$ の部分多様体であることを示せ。また単位行列 I_n における $O(n)$ の接空間 $T_{I_n} O(n)$ を $M(n, n; \mathbf{R})$ の部分空間として求めよ。