幾何学I演習問題

担当: 中島 啓　TA: 佐々木建祀郎, 佐藤敬志, 中西克典

2012年5月30日(水)

演習問題の略解は

http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~nakajima/Lecture/12_Kika1.html

を参照のこと.

問題 37. S^n の北極からの立体射影 $\varphi^+ \colon S^n \setminus \{(0,\dots,0,1)\} \to \mathbf{R}^n$ を**問題 2** のとおりに定める. $\mathbf{R}^n = \{(y_1,\dots,y_n)\}$ 上のベクトル場 X を

$$X = \frac{\partial}{\partial y_\alpha}$$

で定める. $(\alpha = 1,\dots,n)$ このベクトル場 X が S^n 上のベクトル場 $\widetilde{X}$ に拡張されることを証明し, また, そのベクトル場の値 $\widetilde{X}_p$ が 0 になる点 p を全て求めよ. また, $Y = y_1\frac{\partial}{\partial y_1} + \cdots + y_n\frac{\partial}{\partial y_n}$ ではどうか？

問題 38. (1) 二次元トーラス T^2 上に $X = \frac{\partial}{\partial x}$ はベクトル場を定めることを証明せよ. ただし x は $\mathbf{R}\times\mathbf{R}/\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}$ の第一成分の実数である. 正確には, $\mathbf{R}^2$ 上のベクトル場 $\widetilde{X} = \frac{\partial}{\partial x}$ に対して, 射影 π を通じて $d\pi_p(\widetilde{X}_p) = X_{\pi(p)}$ を満たすような T^2 上のベクトル場 X が存在するという意味である.

(2) X が生成する1パラメータ変換群 $F_t \colon T^2 \to T^2$ を求めよ。

問題 39. $\mathbf{R}^n$ 上のベクトル場

$$X = \sum_{i=1}^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad Y = \sum_{i=1}^n Y_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

について

$$[X,Y] = \sum_{i,j=1}^n \left(X_i \frac{\partial Y_j}{\partial x_i} - Y_i \frac{\partial X_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

を証明せよ。

問題 40. ベクトル場 X, Y, Z に対して, ヤコビの恒等式

$$[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$$

を証明せよ.

問題 41. M, N を多様体とし, $F\colon M \to N$ を C^∞ 級写像とする. M 上のベクトル場 X と N 上のベクトル場 Y が F**-関係**にあるとは, X の定める微分作用素 $D_X\colon C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ と Y の定める微分作用素 $D_Y\colon C^\infty(N) \to C^\infty(N)$ の間に

$$D_X \circ F^* = F^* \circ D_Y$$

という式が成り立つときをいう. ただし $F^*\colon C^\infty(N) \to C^\infty(M)$ は, $F^*(g) = g \circ F$ によって定義される写像である. このとき,

(1) X と Y が F-関係にある必要十分条件は, M の各点 p に対して $dF_p(X_p) = Y_{F(p)}$ が成り立つことであることを証明せよ.

(2) X_1 と Y_1, X_2 と Y_2 がそれぞれ F-関係にあるとき, $[X_1, X_2]$ と $[Y_1, Y_2]$ が F-関係にあることを証明せよ.

問題 42. $F\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を $F(x) = x^{1/3}$ によって定義する. M を $\mathbf{R}$ に通常の C^∞ 級微分構造を入れたものとし, N を $\mathbf{R}$ に F が $M \to N$ の微分同相になるように C^∞ 級微分構造を入れたものとする. (すなわち, $F^{-1}\colon N \to M \cong \mathbf{R}$ が N の座標である.)

(1) $\varphi\colon M \to N$ を M, N をともに $\mathbf{R}$ と思ったときの恒等写像とする. C^∞ 級写像であることを証明せよ. しかし φ^{-1} は, C^∞ 級でないことを証明せよ. (よって φ は全単射な C^∞ 級写像であるが微分同相ではない.)

(2) M 上のベクトル場 $X = \frac{\partial}{\partial x}$ について, φ-関係にある N 上のベクトル場 Y が存在しないことを証明せよ.