幾何学I演習問題

担当: 中島 啓　TA: 佐々木建祀郎, 佐藤敬志, 中西克典

2012年6月6日(水)

演習問題の略解は
 http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~nakajima/Lecture/12_Kika1.html
を参照のこと.

問題 43. $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n$ を一つの固定されたベクトルとし、$\mathbf{R}^n$ 上のベクトル場

$$\sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

を考える。$t = 0$ で $x \in \mathbf{R}^n$ を出発する積分曲線が $x + ta$ で与えられることを示せ。

問題 44. $A = (a_{ij})$ を $n \times n$ 実正方行列とし、$\mathbf{R}^n$ 上のベクトル場 $\widetilde{A}$ を

$$\widetilde{A}_x = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_j \frac{\partial}{\partial x_i}$$

によって定義する。ただし, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ である。
このとき, $t = 0$ で $x \in \mathbf{R}^n$ を出発する $\widetilde{A}$ の積分曲線が

$$\exp(tA)x$$

で与えられることを証明せよ。ただし、$\exp(\bullet)$ は行列の指数写像である

問題 45. 先週の**問題 37** に出てきたベクトル場 $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ の積分曲線を求め, それらが完備であることを直接に確かめよ.

問題 46. $\varphi\colon M \to N$ が微分同相写像のとき, M 上のベクトル場 X に対して N 上のベクトル場 $\varphi_* X$ を

$$(\varphi_* X)_{\varphi(p)} = d\varphi_p(X_p)$$

によって定義する。([坪井 I, p.173])
X, Y を M 上の C^∞ 級ベクトル場とし, φ_t, ψ_t を対応する 1 パラメータ変換群とする. (簡単のため X, Y は完備とする.)
(1) $F\colon M \to M$ を C^∞ 級微分同相とするとき, $F \circ \varphi_t \circ F^{-1}$ は, ベクトル場 $F_*(X)$ に対応した 1 パラメータ変換群であることを証明せよ.
(2) $[X, Y] = 0$ である必要十分条件は, $(\varphi_t)_*(Y) = Y$ となることであり, さらに $\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t$ がすべての s, t について成り立つことであることを証明せよ.

問題 47. $n \times n$ 実正方行列の全体の集合を $\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbf{R})$ とし、その中の可逆な $n \times n$ ものの全体の集合を $G = \mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ をとする。G は群になる。$\mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbf{R}) \cong \mathbf{R}^{n^2}$ とし、G は $\mathbf{R}^{n^2}$ の開集合と思って C^∞ 級多様体の構造を入れる。

(1) $G \times G \to G; (g,h) \mapsto gh$, $G \to G; g \mapsto g^{-1}$ が C^∞ 級写像であることをチェックせよ。

(2) A を $n \times n$ 実正方行列 (可逆とは限らない) としたときに、$g \in G$ に対して

$$\widetilde{A}_g = gA \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbf{R}) \cong \mathbf{R}^{n^2} \cong T_gG$$

によって, g における接ベクトル $\widetilde{A}_g$ を定める。$\widetilde{A}$ は, G 上のベクトル場になることをチェックせよ。

(3) $\widetilde{A}$ の積分曲線を、行列の指数写像を用いて表わせ。

(4) A, B を二つの $n \times n$ 実正方行列としたときに、$[\widetilde{A}, \widetilde{B}]$ が, 行列 $AB - BA$ から上のやり方で定めたベクトル場 $\widetilde{AB - BA}$ に等しいことを証明せよ。