幾何学I演習問題

担当: 中島 啓　TA: 佐々木建祀郎, 佐藤敬志, 中西克典

2012 年 6 月 13 日 (水)

演習問題の略解は
`http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~nakajima/Lecture/12_Kika1.html`
を参照のこと.

問題 48. $S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$ とし, x_1 を S^n 上の関数と考え, $\alpha = dx_1$ とおく。α は, S^n 上の 1 次微分形式である。**問題 2** の座標

$$\varphi^{\pm}(x_1, \dots, x_{n+1}) = (y_1, \dots, y_n) = \left(\frac{x_1}{1 \mp x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{1 \mp x_{n+1}}\right)$$

を用いて、α を dy_i の一次結合として表わせ。

問題 49. (1) $S^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ とし、$\pi\colon \mathbf{R} \to S^1$ を自然な射影とする。x を $\mathbf{R}$ 上の自然な座標とし、dx を対応する 1 次微分形式とする。S^1 上の 1 次微分形式 α で、$\pi^*\alpha = dx$ となるものがただ一つ存在することを証明せよ。以下、簡単のためこれも dx で表わす。

(2) p を S^1 の点とする。$(dx)_p$ はすべての p に対し 0 でないことを示せ。

(3) S^1 上の C^∞ 級関数 $f\colon S^1 \to \mathbf{R}$ で、$df = dx$ となるものが存在しないことを証明せよ。

問題 50. M を C^∞ 級微分可能多様体とする。α は, ベクトル場 X に対して C^∞ 級関数を対応させる写像で, $C^\infty(M)$-線形であるとする。すなわち $\alpha(fX + gY) = f\alpha(X) + g\alpha(Y)$ が、ベクトル場 X, Y, C^∞ 級関数 f, g について成立するとする。

(1) 点 $p \in M$ を取る。p の近傍 W 上で 0 となるベクトル場 X に対して

$$\alpha(X)(p) = 0$$

となることを示せ。

(2) さらに、α は, C^∞ 級 1 次微分形式であって, したがって $\alpha_p\colon T_pM \to \mathbf{R}$ が各点 $p \in M$ ごとに定まり、

$$(\alpha(X))\,(p) = \alpha_p(X_p)$$

となることを証明せよ。

問題 51. (1) 1 次微分形式 α とベクトル場 X, Y に対して,

$$(L_X\alpha)(Y) = X(\alpha(Y)) - \alpha([X, Y])$$

とおく。**問題 50** を用いて $L_X\alpha$ が 1 次微分形式であることを証明せよ。

(2) ベクトル場 X に対応する 1 パラメータ局所変換群を φ_t とする。このとき、1 次微分形式 α について

$$\lim_{t\to 0} \frac{(\varphi_t^*\alpha)_p - \alpha_p}{t} = (L_X\alpha)_p$$

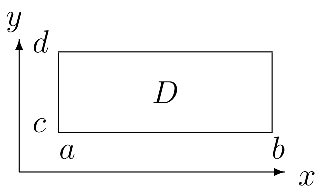
を証明せよ。

ただし、授業でやったベクトル場に関する同様の命題 ([坪井 I, 8.2.1 の定義]) は使ってよい。

問題 52. D を $\mathbf{R}^2$ 内の長方形 $[a,b]\times[c,d]$ とし、∂D をその境界とし、時計と逆回りに向きをつける。$\mathbf{R}^2$ 上の 1 次微分形式 $\alpha = fdx + gdy$ を考える。このとき (長方形に関する) グリーンの公式

$$\int_D \left(-\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial x} \right) dxdy = \int_{\partial D} \alpha$$

を証明せよ。∂D は $\mathbf{R}^2$ の部分多様体でないが $\int_D \alpha$ は、各辺ごとに計算して足しあわせたものと約束する。



問題 53. (1) $\mathbf{R}^2$ 内の開集合 U 上の 1 次微分形式 $\alpha = fdx + gdy$ を考える。このとき U 上の C^∞ 級関数 $\Phi\colon U \to \mathbf{R}$ があって、$d\Phi = \alpha$ となっていたとする。U 内の二点 P, Q を向きのついた曲線 $c\colon [a,b] \to U$ で、$c(0) = P$, $c(1) = Q$ と結ぶ。このとき

$$\int_c \alpha$$

は、$\Phi(Q) - \Phi(P)$ となることを示せ。特に、c の取り方には依らず、P, Q だけで決まることになる。

(2) 逆に、上の積分が端点 P, Q で定まり、P, Q を結ぶ直線の取り方にはよらないとする。このとき $d\Phi = \alpha$ となる U 上の C^∞ 級関数 $\Phi\colon U \to \mathbf{R}$ が存在することを証明せよ。