幾何学I演習問題

担当: 中島 啓　TA: 佐々木建祀郎, 佐藤敬志, 中西克典

2012年6月20日(水)

演習問題の略解は
http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~nakajima/Lecture/12_Kika1.html
を参照のこと.

問題 54. $\mathbf{R}^{2n}$ 上の二次微分形式 $\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 + \cdots + dx_{2n-1} \wedge dx_{2n}$ について, $\omega^n = \underbrace{\omega \wedge \cdots \wedge \omega}_{n\text{ 個}}$ を計算せよ.

問題 55. $\mathbf{R}^2$ 内の領域 $[a,b] \times [c,d]$ で定義された 2 次微分形式 $\alpha = f dx \wedge dy$ が与えられたとする。このとき、その領域で定義された 1 次微分形式 β で $d\beta = \alpha$ となるものが存在することを証明せよ。

問題 56. $f\colon M \to N$ を C^∞ 級写像とするとき、N の微分形式 α, β について

$$f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*(\alpha) \wedge f^*(\beta)$$

が成り立つことを証明せよ。

問題 57. 二次元球面 $S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ を考える. 包含写像を $i\colon S^2 \to \mathbf{R}^3$ とする.
(1) $i^*(dx \wedge dy \wedge dz)$ を求めよ.
(2) $i^*(dx \wedge dy)$ の値が 0 になる球面の点を全て求めよ.

問題 58. f を S^1 上の C^∞ 級関数とし、**問題 49** のように dx を取って、S^1 上の 1 次微分形式 $\alpha = f(x)dx$ を考える。このとき $\alpha = dg$ となるような S^1 上の C^∞ 級関数 g が存在するための必要十分条件は、$\int_{S^1} \alpha = \int_0^1 f(x)dx = 0$ であることを証明せよ。

問題 59. $f(z)$ を正則関数とし、$\omega = f(z)dz = f(z)(dx + idy)$ を複素数に値を取る 1 次微分形式とする。このとき、$d\omega = 0$ を示せ。

問題 60. $\mathbf{R}^2$ から原点を除いた領域 $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ で定義された関数 $f(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2}$ を考える。また、

$$\alpha = \frac{\partial f}{\partial x} dy - \frac{\partial f}{\partial y} dx$$

とおく。

(1) 原点を除いた領域で、$\Delta f = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} f + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} f = 0$ が成り立つことを示せ。したがって、$d\alpha = 0$ が成り立つ。

(2) C_ε を原点を中心とする半径 ε の円周とする。反時計回りに向きをいれておく。このとき、$\displaystyle\int_{C_\varepsilon} \alpha$ を計算せよ。

(3) D を原点を含む下の図のような領域とし、その境界を C とし、反時計回りに向きを入れる。このとき、$\displaystyle\int_C \alpha$ を計算せよ。

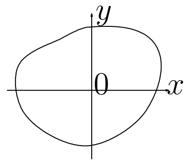

図 1: 原点を含む領域